

### Aufgaben zum Wochenende (4)

- (1) Betrachten Sie die Schar von Funktionen  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{ax}$ . Dabei sei  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ . Skizzieren Sie die Schar (es genügt eine grobe Skizze einiger Exemplare mit der Andeutung, was eine Veränderung von  $a$  bewirkt). Insbesondere sollten Sie die Lage eventueller Extrema in Abhängigkeit von  $a$  darstellen. Bearbeiten Sie auch quantitativ die Frage nach Wendepunkten.
- (2) Was ist der (vektorielle!) Mittelwert der Vektoren  $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $0 \leq t \leq \pi/4$ ? Können Sie dem einen physikalischen Sinn geben?
- (3) Berechnen Sie folgende Integrale:
  - (a)  $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) dx, \int_0^3 \sqrt[5]{x} dx, \int_{-1}^1 x^3 \cos^4(x) dx, \int_0^\pi 2 \sin(-4x) dx.$
  - (b)  $\int \frac{1}{\sqrt{-2x+1}} dx, \int \frac{1}{2x^2+1} dx$ , schreiben Sie nun auch den Integranden von  $\int \sin^2(x) dx$  so um, dass Sie 1/ $\alpha$ - Regel verwenden können (Additionstheorem!). Rechnen Sie damit das unbestimmte Integral aus.
  - (c)  $\int x e^{-x} dx, \int \sqrt{x} \ln(x) dx$  (partielle Integration)
  - (d) (Umkehrung der Kettenregel:)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) dx, \int x^2 e^{x^3} dx.$
- (4) Sie kennen  $f(x_0) = 10$  und  $f'(x) = 3(x-1)^2$  für alle  $x$ . Was ist dann  $f(x)$ ?
- (5) Benutzen Sie folgendes Resultat: Wenn eine Funktion  $f$  zwei mal stetig differenzierbar ist im betrachteten Bereich, dann gilt für das Restglied  $R(\Delta x)$  der Tangentenerlegung

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + R(\Delta x)$$

folgende Gleichung:

$$R(\Delta x) = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (x_0 + \Delta x - t) f''(t) dt.$$

Sinn dieses Integrals nicht seine genaue Ausrechnung, sondern nur eine vernünftige Abschätzung seines Absolutbetrages nach oben. Zu diesem Zweck wird man praktisch oft so vorgehen, dass man den Term  $f''$  durch einen Wert maximalen Betrages ersetzt und das verbleibende einfache Integral ausrechnet. Wenden Sie das nunmehr an, um abzuschätzen:

- (a) den Fehler bei Näherung von  $\sin(x)$  durch  $x$  im Bereich  $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ ,
  - (b) den Fehler bei Näherung von  $e^x$  durch  $1 + x$  (so lautet die Näherung 1. Ordnung für kleine  $|x|$  mit  $x_0 = 0$ , prüfen Sie das nach) im Bereich  $[0, \frac{1}{2}]$ .
- Prüfen Sie Ihre Abschätzungen auch nach, indem Sie für beide Fälle den absoluten Fehler der jeweiligen Näherung am betreffenden rechten Rande des je genannten Intervalls mit dem Taschenrechner ausrechnen.
- (6) (System kartesisch.) Auf der  $xy$ - Ebene steht ein senkrechter Stab mit Spitze in  $(2, 1, h)$ ,  $h > 0$ . Dieser Stab rotiere um die Achse, welche senkrecht auf der  $xy$ - Ebene steht und durch  $(1, 1, 0)$  geht.
    - (a) Parametrisieren Sie die Bahn, welche die Spitze des Stabes bei voller Umdrehung beschreibt.
    - (b) Welche Bahn beschreibt der Schatten der Spitze des Stabes auf der  $xy$ - Ebene, wenn eine punktförmige Lichtquelle im Punkt  $(0, 0, H)$  angebracht ist,  $H > h$ ?