Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie für beliebige $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems
$$\begin{aligned} 2ax + y - 2z &= 0 \\ -4x + ay + z &= 0 \\ 3x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned} \;.$$

2. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks PQR, $\vec{x}_P = (2,3,4)$, $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$, $\vec{x}_R = (3,1,1)$.

3. Zerlegen Sie den Vektor $(1,2,3)$ als Summe zweier Vektoren, von denen einer parallel zu $(2,-1,2)$ und einer senkrecht zu $(2,-1,2)$ steht.

4. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1,2,2)+\lambda(2,1,-1)+\mu(2,-3,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der Ebene $2x-y+3z=1$ sowie zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P, $\vec{x}_P = (3,4,3)$.

5. Sei die Ebene E gegeben durch $2x+3y-z=1$, die Gerade g.durch $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(1,2,3)$. Die Ebene H stehe senkrecht auf E und enthalte die Gerade g. Geben Sie eine Normalenform für H.

6. Schauen Sie sich die Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = (3,2,-2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (4,-3,3)$ an. Sei $\vec{x} = (2,-3,4)$. Lösen Sie nun die Gleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ (was sind die Unbestimmten?), indem Sie an die Gleichung geeignete Vektoren skalar anmultiplizieren.

7. Sei $\vec{a} = (1,2,-3)$. Geben Sie die Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ in Matrixform an, und untersuchen Sie das Lösungsverhalten für beliebigen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Nutzen Sie auch die geometrischen Eigenschaften des Vektorproduktes, um das Lösungsverhalten zu erkennen.

8. Die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,-2) + \lambda(2,-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, wird an der Ebene E, die durch $2x - y + z = 1$ beschrieben ist, gespiegelt. Geben Sie eine Parameterdarstellung des Resultates der Spiegelung. Stellen Sie sich nunmehr vor, ein Lichtstrahl falle vom Punkt $\vec{x}_g(0)$ aus in Richtung von g auf E und werde an E reflektiert. Geben Sie eine Parameterdarstellung für den ausfallenden Strahl.

9. Eine Leiter der Länge l steht an eine Wand gelehnt, im Winkel α zum Boden, auf der die Wand senkrecht steht. Auf der Leiter an beliebiger Stelle steht jemand. Es wirkt nur die Gravitationskraft $(0,-mg)$. Die Leiter verhalte sich (idealisierend) vollkommen starr. (Man stelle das Problem zweidimensional dar und führe natürlich für die Anwendung des Vektorproduktes eine dritte Komponente Null in die beschreibenden Vektoren ein. Den Bodenpunkt der Leiter setzt man zweckmäßig in den Koordinatenursprung.) Welche Seitenkraft muss die Wand aushalten? Es werde angenommen, dass die Leiter nicht wegrutsche, die kompensierende Reibungskraft also groß genug sei. Man mache insbesondere die Abhängigkeit des Resultates von α und der Leiterposition klar.