

Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Es gelte $p + q = 1$. Wozu vereinfacht sich dann $p^2q + q^2p$?
2. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+b} = -1$ (a Unbestimmte, b äußerer Parameter). Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn a und b beide Unbestimmte sind? Geben Sie dafür eine Parameterdarstellung.
3. Lösen Sie die Gleichung

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}.$$

Welche ähnlich gebauten Gleichungen werden von den Lösungen noch erfüllt?

4. Starten Sie mit einer Parameterdarstellung der Parabel $y = x^2$. Führen Sie mit der Parabel folgende Operationen aus: 1. Streckung längs der y - Achse mit Faktor 2, 2. Verschieben des Scheitelpunkts in den Punkt (x_0, y_0) . Gewinnen Sie durch entsprechende Vektoroperationen eine Parameterdarstellung der so entstehenden Parabel aus der ursprünglichen für $y = x^2$.
5. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, -3)$, $\vec{x}_Q = (1, 2, 2)$.
 - (a) Der Punkt R werde dadurch erreicht, dass man von P nach Q geht und dann in derselben Richtung noch einmal so weit. Geben Sie die Koordinatendarstellung für R .
 - (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$.
 - (c) Sie teilen die Strecke \overline{PQ} in fünfzig gleichlange Abschnitte ein. Geben Sie die Koordinatendarstellungen der Teilungspunkte (verwenden Sie natürlich Indexschreibweise).
6. Es sei ein dreidimensionales kartesisches Koordinatensystem vorausgesetzt. In der xy - Ebene liegt parallel zu den Koordinatenachsen ein Quadrat der Seitenlänge $2a > 0$ mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Darauf steht ein (gewöhnlicher gerader) Kirchturm mit diesem quadratischen Grundriss und der Höhe h , auf dem ein Dach in Form einer symmetrischen vierseitigen Pyramide steht. Die Spitze liege in der Höhe $h + b$ über dem Ursprung, $b > 0$.
 - (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene, welche durch die Dachfläche geht, deren sämtliche Punkte x - Koordinaten ≥ 0 haben.
 - (b) Wie können Sie die Parameterdarstellung aus a. leicht abändern, um eine solche für die Ebene durch die Dachfläche zu finden, die gegenüber liegt, deren Punkte also lauter x - Koordinaten ≤ 0 haben?
 - (c) Wie kann man genau alle Punkte beschreiben, die auf der Dachfläche aus a. liegen? (Man denke an eine passende Einschränkung des Parameterbereichs für die Parameter der zugehörigen Ebene).
7. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmenge(n), ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde außer f. und h.
 - (a) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda^3 + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$.
 - (b) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (3 - 4\lambda, 2 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (c) Im \mathbb{R}^2 : $2x = y^3$, $y \in \mathbb{R}$.
 - (d) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = (1, 2) + \lambda(3, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 - (e) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1) + \mu(3, 4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$.
 - (f) Im \mathbb{R}^3 : $x + y \geq 2$.
 - (g) Im \mathbb{R}^3 : $z^2 = x^2 + y^2$ und $1 \leq z \leq 3$.
 - (h) Im \mathbb{R}^3 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2\lambda - 3\mu + 1, 2\lambda + 3\mu - 1, \lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
8. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_Q = (2, 3, 1)$, $\vec{x}_R = (-2, 1, 2)$. Ergänzen Sie Das Dreieck PQR zu einem Parallelogramm, bei dem die Strecke \overline{QR} eine Diagonale bildet. Geben Sie den vierten Parallelogrammpunkt in Koordinatenform, dazu den Mittelpunkt des Parallelogramms.