Übungen über die Weihnachtsferien

Erster Block: Einige Standardaufgaben

1. Eine Variable X nimmt mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ den Wert -1 an, mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ den Wert 0 und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ den Wert 1. Geben Sie $\mu(X)$ und $\sigma(X)$ an. Skizzieren Sie den Graphen der Verteilungsfunktion von X.

2. In einer Gruppe von zehn Leuten seien vier für eine Aufgabenbewältigung Geeignete. Sie ziehen zufällig drei Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie wenigstens zwei Geeignete dabei?

3. Es sei X eine $(n,p)-$ binomialverteilte Variable. Welchen Wert hat dann $\mu\left(X^2\right)$? (Hinweis: Nutzen Sie einen bekannten Zusammenhang mit $\sigma^2\left(X\right)$.

4. Es sei $\mu\left(X\right) = 10$, $\sigma\left(X\right) = 5$, $\mu\left(Y\right) = 20$, $\sigma\left(Y\right) = 8$. Berechnen Sie $\mu\left(2X - 3Y + 4\right), \sigma\left(-2Y + 3\right)$. Setzen Sie nunmehr zusätzlich X und Y als linear unabhängig voraus. Welchen Wert hat dann $\sigma\left(2X - 3Y + 4\right)$?

5. Es sei X eine Variable mit konstantem Wert, Y eine beliebige Variable mit Erwartungswert $\mu\left(Y\right)$. Welchen Wert hat $Cov\left(X,Y\right)$?

6. Geben Sie ein 99%-Vertrauensintervall (zweiseitig, symmetrisch um den Erwartungswert) für die Augensumme von 500 Würfen mit einem gewöhnlichen Würfel.

7. In einer Population mögen 10% eine gewisse Eigenschaft haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie unter 300 zufällig ausgewählten Mitgliedern wenigstens 25 mit der Eigenschaft? (Geben Sie eine gute Näherung.) In welchem Intervall symmetrisch um den Wert 30 wird die gefundene Anzahl mit Wahrscheinlichkeit 0.99 liegen?

8. Man führt zwei unabhängige Hypothesentests durch, jeweils auf demselben Niveau α. Man möchte dabei mit Wahrscheinlichkeit 0.01 in keinem der beiden Fälle den Fehler 1. Art begehen. Wie muss man α wählen?

9. Welchen Stichprobenumfang benötigen Sie, um eine unbekannte relative Häufigkeit mit 99% Sicherheit auf 0.01 genau zu schätzen? (Hinweis: Rechnen Sie mit der maximal möglichen Streuung und Normalverteilung.)

10. Seien X, Y unabhängige Variablen. Sie wollen über eine $X-$ Stichprobe und eine $Y-$ Stichprobe je vom Umfang n, über einen zu beobachtenden Wert von $\overline{X} - \overline{Y}$ die Mittelwertdifferenz $\mu\left(X\right) - \mu(Y)$ schätzen. Weiter können Sie abschätzen: $\sigma\left(X\right) \leq 30$, $\sigma\left(Y\right) \leq 20$. Wie groß sollten Sie n wählen, damit Sie die Mittelwertdifferenz $\mu\left(X\right) - \mu\left(Y\right)$ mit mindestens 99% Sicherheit auf 1 genau schätzen?

11. Es geht um eine unbekannte relative Häufigkeit p in einer Population. Auf welchem Niveau können Sie mit einer beobachteten relativen Häufigkeit von 0.3, die Sie in einer Zufallsstichprobe vom Umfang 230 beobachtet haben, die Hypothese '$p \geq 0.35$' verwerfen? Welche positive Aussage können Sie also mit welcher Sicherheit treffen? Zusatzfrage: Könnte man hier beim Rechnen eine Stetigkeitskorrektur anbringen?

12. Wie groß ist die Mittelwertdifferenz $\mu\left(X_A\right) - \mu\left(X_B\right)$ mit 99% Sicherheit *mindestens*, wenn Sie in einer Stichprobe zu X_A vom Umfang 120 und einer Stichprobe zu X_B vom Umfang 140 (unabhängige Stichproben!) beobachtet haben: $\overline{x}_A = 130$, $\overline{x}_B = 100$, $s\left(X_A\right) = 30$, $s\left(X_B\right) = 20$? Formulieren Sie das Resultat auch in der Form, welche Hypothese auf welchem Niveau zu verwerfen ist.

13. Was müssen Sie geometrisch mit dem Graphen von f $\left(f(x) = \frac{x+1}{e^x+2}\right)$ der Reihe nach tun, um den Graphen zu g $\left(g(x) = 3\frac{5x-4+1}{e^{5x-4}+2} + 1\right)$ zu erhalten? (Achten Sie auf korrekte Reihenfolge.)

14. Eine Größe q in Abhängigkeit von der Zeit t verändere sich in der Zeit gemäß dem Gesetz $q(t) = q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/10}$. q_0 sei dabei eine Konstante > 0.

    (a) Skizzieren Sie grob den zeitlichen Verlauf.

(b) Was geschieht während jeder Zeitspanne der Breite 10 Zeiteinheiten?

(c) Wie lange braucht es jeweils, damit sich der Wert der Größe q auf ein Hundertstel des Ausgangswertes vermindert?

15. Berechnen Sie folgende Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dt}e^{-\pi x^2 t}$,

(b) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}\ln(2)}$,

(c) $\frac{d}{dx}e^{1/x}$, diskutieren Sie in diesem Falle auch die zugehörige Funktion $x \mapsto e^{1/x}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

16. Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen (jeweils im maximalen reellen Definitionsbereich, den Sie dazu angeben sollten, stellen Sie jeweils ausdrücklich fest, wenn eine Standardsymmetrie besteht), und klären Sie auch jeweils *quantitativ* die Extremwertfrage:

(a) $f(x) = -\ln^2(x)$,

(b) $g(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$,

(c) $h(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$.

17. Zeigen Sie, dass für fest vorgegeben Zahlen $x_1, ..., x_n$ das arithmetische Mittel $\overline{x}$ folgende Funktion zum Minimum macht: $f(\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha)^2$. Oder anders gesagt: f hat an der Stelle $\alpha = \overline{x}$ ihr Minimum (sogar ein absolutes).

18. Die Variable X habe folgende Verteilungsfunktion: $F_X(a) = \frac{e^a}{1+e^a}$, für $a \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $P(X \geq 2)$.

(b) Berechnen Sie die Dichtefunktion, mit der X verteilt ist.

(c) Skizzieren Sie grob Dichte und Verteilungsfunktion von X.

Zweiter Block: Etwas schwierigere Aufgaben

1. Geben Sie ein einfaches Beispiel einer Zufallsvariablen X mit ihrer Verteilung (nehmen Sie eine Variable X mit nur zwei verschiedenen Werten, beide > 0, und geben Sie die Verteilung frei vor, so dass allerdings beide Werte Wahrscheinlichkeiten > 0 erhalten). Prüfen Sie nach, ob $\ln(\mu(X)) = \mu(\ln(X))$.

2. (Setzen Sie für diese Aufgabe voraus, dass n groß genug ist, um die Verteilung von $\overline{X}$ zum Stichprobenumfang n sehr genau durch eine Normalverteilung zu nähern.) Wenn jemand einen unbekannten Mittelwert $\mu(X)$ anhand einer Stichprobe vom Umfang n durch $\overline{x}_{(n)}$ schätzt, ein anderer dasselbe anhand einer Stichprobe vom Umfang $2n$ mittels $\overline{x}_{(2n)}$ tut:

(a) Ist $\overline{x}_{(2n)}$ zwanglsläufig besser als $\overline{x}_{(n)}$?

(b) Welche Beziehung zwischen den Qualitäten beider Schätzwerte besteht genau? Formulieren Sie das sorgfältig in Worten.

3. (Diese Aufgabe ist wirklich schwierig.) Eine Population bestehe aus zwei getrennen Teilpopulationen A und B, also $\Omega = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$. Dabei mache A ein Drittel der Gesamtpopulation aus. Die Variable X sei auf Ω definiert, und zwar sei $X_{|A}$ normalverteilt mit Mittelwert 20, Streuung 10, und es sei $X_{|B}$ ebenfalls normalverteilt, aber mit Mittelwert 50 und Streuung 10. Sie wollen eine Grenze c setzen und dann entscheiden: Wenn der $X-$ Wert bei einem Mitglied von Ω unter c liegt, so wird entschieden, es handele sich um ein Element von A, andernfalls wird auf Mitgliedschaft zu B entschieden. Wie muss man c setzen, um die Wahrscheinlichkeit für jedwede Fehlentscheidung zu minimalisieren?

4. Berechnen Sie allgemein zu den Dichten (sehen Sie schnell ein, wie die aussehen)

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & -a \leq x \leq a, \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}, \quad \alpha > 0,$$

   den Mittelwert $\mu(\alpha)$ und die Streuung $\sigma(\alpha)$. (Welche Rollen haben α und x?) Tragen Sie auch $s(\alpha)$ gegen α auf.

5. Diskutieren Sie folgende Schar von Funktionen: $f_\alpha(x) = \frac{x^2+\alpha}{x}$, im maximalen reellen Definitionsbereich, für beliebige Werte des Parameters α in $\mathbb{R}$. (Fallunterscheidung - Sie sollten drei Tapen finden und auch grob deren Graphen skizzieren.)

6. Die Variable X sei gleichverteilt auf $[3;5]$. Welchen Erwartungswert haben Sie für die Variable $\sqrt{\frac{1}{2}X - 1}$?

7. Eine Variable X sei $\log -$ normalverteilt, d.h. sie nimmt nur Werte > 0 an, und die Variable $\ln(X)$ ist normalverteilt, sagen wir mit Mittelwert μ und Streuung σ. Geben Sie Dichte- und Verteilungsfunktion für X an.

8. Die Variable X sei $(0,1)-$ normalverteilt. Berechnen Sie $P(X^2 \leq a)$ für beliebigen Wert $a \geq 0$. Was kommt speziell für $a = 3.84$ heraus? Geben Sie nun auch eine Dichtefunktion für die Variable X^2 an.