Übungen (16)

(1) (a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \sqrt{2x-1}dx, \qquad \int \ln\left(\sqrt{x}\right)dx, \qquad \int \frac{1}{1-2x}dx$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^4}dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{x}dx, \qquad \int \frac{x}{(x-1)(x+2)(3-x)}dx, \qquad \int \frac{1}{x^2(x-1)}dx.$$

Hinweis: Führen Sie im ersten Integral eine lineare Substitution durch. Dann entsteht etwas ganz Einfaches.

(2) Berechnen Sie die Länge des Graphen von exp im Intervall $[0,2]$.

(3) Berechnen Sie den Mittelwert der Ortsvektoren $\vec{x}(\alpha) = \alpha\vec{x}_P + (1-\alpha)\vec{x}_Q$, $0 \leq \alpha \leq 1$. (Entspricht das Resultat den Erwartungen?)

(4) Berechnen Sie das Volumen eines Kegels vom Öffnungswinkel $\pi/3$ und von der Höhe h als Volumen eines Rotationskörpers. Hinweis: Zunächst einmal gilt es, für die Mantellinie die korrekte lineare Funktion aufzustellen, deren Graph dann zu rotieren ist. Sehen Sie nach, ob Ihr Resultat mit der gängigen Formel übereinstimmt, die Radius der Grundfläche und Höhe benutzt.

(5) An welchen Stellen hat $f(x) = x^2\sqrt{1-(x-1)^2}$ Extremwerte? Skizzieren Sie auch den Graphen der Funktion. Achten Sie mittels der Ableitung auf korrekte Steigungen an den entscheidenden Stellen.

(6) Modifizieren Sie durch lineare Transformation die Funktion $f(x) = x^3 - x$ derart, dass der Wendepunkt in (x_0, y_0) liegt und die Steigung im Wendepunkt den Wert -100 bekommt.

(7) Wenn noch Zeit ist: Holen Sie die Aufgabe 7 von Übung Nr. 14 nach.

Übung (17)

(1) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ der Werte von $\frac{1+\sqrt{4+2x}}{1+\cos(x)}$.

(2) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{1+e^x}$, im maximalen reellen Definitionsbereich dieses Ausdrucks. Sie können leicht den Graphen durch 'Zusammensetzen' grob skizzieren und qualitativ die Frage nach Extrema beantworten. Aber berechnen Sie die erste Ableitung, und machen Sie sich klar, dass Sie keine Chance haben, ihre Nullstellen exakt auszurechnen. Versuchen Sie immerhin (Hausaufgabe!), gute Näherungen für die Abszissenwerte der Extrema mittels des Newtonverfahrens zu geben.

(3) Sei $\vec{x}(t) = (2\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$. (Was für ein geometrisches Gebilde ist hier parametrisiert?) Für welche Werte von t stehen Geschwindigkeits- und Ortsvektor senkrecht aufeinander?

(4) Beschreiben Sie folgende geometrische Abbildung des $\mathbb{R}^2$ auf sich als Matrix: Jeder Vektor wird mit Faktor $r > 0$ gestreckt in Richtung der Geraden $y = x$, während jede Vektorkomponente senkrecht dazu bleibt, wie sie ist. Hinweis: Sie können leicht sagen, wie die Vektoren $(1,1)$ und $(-1,1)$ abgebildet werden. Nun stellen Sie $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ als Linearkombinationen dieser Vektoren dar und ermitteln über die Linearität die Bilder von $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, was die Matrix ergibt. Anderer Weg: Drehen Sie zuerst um $\pi/4$ gegen den Uhrzeigersinn, strecken Sie dann längs der $y-$ Achse, drehen Sie schließlich um $\pi/4$mit dem Uhrzeigersinn. Multiplikation der entsprechenden Matrizen in der korrekten Reihenfolge ergibt dasselbe Resultat.

(5) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \ . \\ 3x - 4y + 6z &= 4 \end{aligned}$$

Geben Sie anschließend ohne weitere Rechnung die Lösung des zugehörigen homogenen Systems an. Erschließen Sie, ob die Zeilenvektoren der zugehörigen Matrix (wie lautet sie?) linear unabhängig sind. Was ist mit den Spaltenvektoren?

(6) Führen Sie mit den Vektoren $\vec{a} = (1,2,2)$, $\vec{b} = (-1,2,3)$, $\vec{c} = (2,-3,1)$ alles in je einem Beispiel aus, was wir mit Vektoren an Grundrechenarten haben, natürlich auch über die linearen Operationen hinaus. Berechnen Sie auch die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.

Übungen (18)

(1) Vereinfachen Sie $\left(\lambda\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left((\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c})\vec{a}+2\vec{b}\right)$.

(2) Seien $\vec{x}_P=(1,2,1)$, $\vec{x}_Q=(-2,1,2)$. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene E, auf der P und Q liegen und die parallel zu $(1,1,1)$ liegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch die Mitte der Strecke $\overline{PQ}$ verläuft und senkrecht auf E steht. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene F, welche senkrecht auf $\overline{PQ}$ steht und durch den Mittelpunkt der Strecke geht.

(3) Was ist die allgemeinste Lage zweier Geraden im Raum? Entwickeln Sie nun folgendermaßen eine Formel für den Abstand zweier nicht paralleler Geraden, die mit $\vec{x}_g(\lambda)=\vec{x}_P+\lambda\vec{a}$, $\lambda\in\mathbb{R}$, sowie $\vec{x}_h(\mu)=\vec{x}_Q+\mu\vec{b}$, $\mu\in\mathbb{R}$, parametrisiert seien: Berechnen Sie zuerst (allgemein mit diesen Daten!) je eine Normalenform für die Ebenen E und F, die dadurch charakterisiert sind, dass E und F beide sowohl zu g als auch zu h parallel liegen (also können Sie sofort einen gemeinsamen Normalenvektor angeben!) und dass E die Gerade g enthält, F die Gerade h. Nunmehr können Sie den Abstand zwischen g und h als den Abstand zwischen E und F bestimmen, wofür Sie schon eine Formel haben.

(4) In welchem Winkel schneidet die Tangente an den Sinusgraphen bei $x=\pi/3$ die $x-$ Achse? (Machen Sie das einmal über Tangens = Steigung, zum andern auch über den Winkel zwischen zwei Vektoren, und sehen Sie, dass dasselbe herauskommt.)

(5) Berechnen Sie folgende Ableitung: $\frac{d}{dx}\frac{x-1}{1+\ln(x^2+1)}$.

(6) Berechnen Sie $\int\frac{\ln(\arctan(x))}{1+x^2}dx$.

(7) Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $\frac{2-3jz}{3+4jz}=1+j$.