# Übung (13)

(1) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ bei dem Ausdruck $\frac{d}{dx}\frac{1-\sin^3(x)}{1+\arctan(x)}$.

(2) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für den Ausdruck $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ für $v^2 << c^2$. (Welche Funktion ist zu betrachten?) Welche Stelle hinter dem Komma wird bei der Näherung erst falsch, wenn $v = c/100$?

(3) Betrachten Sie die Funktionenschar $f_{\alpha,\beta}\,(x) = \frac{e^{\alpha(x-\beta)}}{1+e^{\alpha(x-\beta)}}$, mit freien Parametern $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$. Wählen Sie $\alpha, \beta$ so, dass der Wendepunkt bei $x = 10$ sitzt und die Steigung des Graphen im Wendepunkt genau 100 beträgt.

(4) Wo liegen die Extremwerte der Funktion $f(x) = e^{-2x}\sin(x)$? Geben Sie alle an, und unterscheiden Sie Maxima und Minima.

(5) Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)\,,\ t \in \mathbb{R}$. Wie sieht sie aus? In welchem Winkel steht $\vec{x}'(t)$ zur $xy-$ Ebene (unabhängig von $t$!)? Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahn der Kurve im Punkt $\vec{x}\,(\pi/2)$. Beschreiben Sie die Ebene durch den Punkt $\vec{x}(\pi/2)$, durch welche die Bahn der Kurve in diesem Punkt senkrecht hindurchstößt. Geben Sie zweckmäßig für diese Ebene eine Normalenform.

(6) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabel, indem Sie die Bedingung $\vec{x}'(t)\vec{x}''(t) = 0$ nutzen: $\vec{x}(t) = (2,1,1) - t\,(3,2,-2) + \frac{1}{2}t^2\,(2,1,-3)\,,\ t \in \mathbb{R}$.

(7) Diskutieren Sie (einschließlich quantitativer Behandlung der Extremwertfrage) folgende Schar von Funktionen: $f_\alpha(x) = \frac{x}{1+\alpha x^2}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (Fallunterscheidung, grobe Skizzen.)

(8) Verwenden Sie die Differentiationsregel für Umkehrfunktionen, um $\arcsin'$ zu ermitteln.

# Übung (14)

(1) Verwenden Sie die de L'Hospitalsche Regel, um zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0}(x \ln x) = 0$.

(2) Wie sieht es aus mit Existenz und gegebenenfalls Lage der Extremwerte bei den Funktionen der Schar $f_\alpha(x) = x + \alpha \sin(x)$, $\alpha > 0$? Unterscheiden Sie drei qualitativ verschiedene Fälle, und skizzieren Sie jeweils ein Exemplar grob qualitativ.

(3) Bilden Sie $\frac{d}{dt}e^{jt}$ naiv gemäß Kettenregel ab. Schreiben Sie das Resultat anschließend in kartesischer Form auf. Stellen Sie fest, dass korrekt genau das herauskommt, was die komponentenweise Ableitung von $(\cos t, \sin t)$ liefert, wenn Sie die anschließend wieder als komplexe Zahl schreiben.

(4) Welche mittlere Steigung hat die Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[-1, 2]$? Rechnen Sie für diesen Fall einen Abszissenwert $\xi \in ]-1, 2[$ aus, der mit $f'(\xi)$ diese globale Steigung als lokale realisiert. Wie viele derartige Werte gibt es in diesem Fall? Was ist die mittlere Steigung von sin auf $[0, 4\pi]$? An wie vielen Stellen im Innern dieses Intervalls kommt dieselbe lokale Steigung heraus?

(5) Zeigen Sie mittels des Satzes vom endliche Zuwachs, dass $x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ für $x \geq 0$. Formulieren Sie auch, was Sie damit für Zahlen $x < 0$ als Resultat haben. Wie viele Stellen hinter dem Komma werden also mindestens richtig, wenn man für Zahlen $x$ mit $|x| \leq \frac{1}{2}$ den Wert $\sin(x)$ durch $x - \frac{x^3}{3!}$ nähert?

(6) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+\tan(x)}$. Achtung: Nicht alle Definitionslücken verhalten sich hier gleich - erkennen Sie zwei Typen. Stellen Sie für $f$ auch einmal quantitativ die Lage der Wendepunkte fest. Sie können die Steigung bei den Nullstellen (?!) mittels de L'Hospitalscher Regel feststellen.

(7) Betrachten Sie das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 y$.
   (a) Wie lautet der Gradient an beliebiger Stelle $(x_0, y_0)$?
   (b) Wie sieht die Niveaukurve zum Feldwert 1 aus? Bekommen Sie auch die wesentliche Fallunterscheidung für alle Niveaukurven (zu beliebigem Feldwert also) hin?
   (c) Welche Gerade geht durch den Punkt $(1, 1)$ und verläuft senkrecht zur Niveaukurve durch diesen Punkt? (Hinweis: Verwenden Sie den Gradienten!)

# Übung (15)

(1) Geben Sie eine obere Schranke für $\int_{-2}^{2} \arctan^2(x)dx$ anhand der Flächendeutung.

(2) Welchen Wert muss $\int_{-3}^{3} \frac{\sin(x)}{1+x^4} dx$ haben (wiederum anhand der unmittelbaren geometrischen Interpretation)?

(3) Stellen Sie mittels Integration fest, dass in beliebigem Intervall, dessen Breite eine volle Periodendauer beträgt, der Mittelwert von $a\cos(\omega t + \varphi) + b$ gleich $b$ ist.

(4) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{x}$ im Bereich $[1; 3]$?

(5) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int_{-2}^{2} \left(1 + 2x^4\right) dx$, $\int_{0}^{\pi/2} \left(e^x - 3\cos(x) - \sqrt{x}\right) dx$.

(6) Berechnen Sie $\int_0^1 \sin(10t)\, dt$, $\int \frac{2}{x^2+2} dx$, $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}} dx$, $\int (2x-1)^{90}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}} dx$.

(7) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int x\sin(x)dx$, $\int x\sqrt{1+x^2}dx$, $\int \cos(x)\ln(1+\sin(x))\, dx$. Benutzen Sie für letzteres Integral, dass Sie bereits wissen: $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$.

(8) Eine Bewegung verlaufe mit der Beschleunigung zur Zeit $t$ : $\vec{b}(t) = (1, 1, -2)$. Zur Zeit $t = 0$ befinde man sich am Ort $(1, 1, 1)$ und habe die Geschwindigkeit $(0, 0, 1)$. Stellen Sie die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion $t \mapsto \vec{v}(t)$ und die zugehörige 'Weg-Zeit-Funktion' $t \mapsto \vec{s}(t)$ auf. Beachten Sie, dass Sie die Aufgabe einmal durch 'Wissen', zum andern aber auch durch 'Hochintegrieren' lösen können. Verwenden Sie Letzteres, um dassselbe Problem für die Beschleunigungsfunktion $\vec{b}(t) = t^2(1, 1, -2)$ zu lösen, mit denselben Anfangswerten.