Übung (9)

(1) Vereinfachen Sie $\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{b}+4\vec{a}\right)$.

(2) Berechnen Sie, und deuten Sie geometrisch zu $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-2,1,-2)$ und $\vec{c}=(2,-1,4)$: $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$, anschließend nutzen Sie das Resultat und die algebraischen Eigenschaften des Spatproduktes, um schnell anzugeben: $\vec{b}\,(3\vec{a}\times(-5)\vec{c})$, $\vec{b}\,(\vec{c}\times 2\vec{a})$.

(3) Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen auf: $2-3j$, $-3+2j$, $2e^{j\pi}$, $\frac{1}{2}e^{\cdot -j\pi/4}$.

(4) Bringen Sie folgende komplexen Zahlen in exakte kartesische Form: $e^{3j\pi/2}$, $e^{3j\pi/4}$, $e^{-7j\pi/6}$, $e^{10j\pi/3}$. Wie sollte man letztere Zahl einfacher auch schon in der Polarform schreiben?

(5) Bringen Sie auf kartesische Endform: $\frac{3}{-j}$, $(2-3j)(4-j)$, $\frac{2-5j}{1-6j}$, $z\overline{z}+j$ $(z\in\mathbb{C})$, $\frac{1-2j}{2+4aj}$ $(a\in\mathbb{R})$. Warum ist $3z+4j$ *keine* kartesische Form, wenn $z$ komplex ist? Wie kann man dann eine kartesische Form aufschreiben?

(6) Geben Sie den Wert von $\left|\frac{2+2j}{3-4j}\right|$ direkt an, ohne den Quotienten zu berechnen.

(7) Geben Sie die Zahl $z=-3\sqrt{3}+3j$ in *exakter* Polarform.

(8) Zeichnen Sie die Zahlen $z_1=2e^{-j\pi/3}$, $z_2=e^{j\pi/4}$, und bestimmen Sie (grob) *graphisch* $z_1\cdot z_2$ sowie $z_1/z_2$. Schreiben Sie auch die Polardarstellungen der Resultate auf.

(9) Rechnen Sie aus (mit etwas Konzentration sind beide im Kopfe auszurechnen!):

$$1+j+\frac{1}{3j},\quad \frac{1}{j+\frac{1}{j+1}}.$$

(10) Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert durch $z(t)=-3+jt$, $t\in\mathbb{R}$?

(11) Was für eine Menge komplexer Zahlen ist parametrisiert mit $z\,(t)=te^{jt}$, $t\geq 0$?

# Übung (10)

(1) Sei $z \in \mathbb{C}$. Was ergeben die Ausdrücke $(z+\overline{z})/2$, $(z-\overline{z})/(2j)$? Wie sollte man für diese Aufgabe $z$ ansetzen?

(2) Lösen Sie in $\mathbb{C}$: $z^2+2z+10=0$, $\frac{1}{z-j}=3-j$, $\frac{zj+1}{z+2j}=j+1$, $z^2-(j+1)\,z+1=0$.

(3) Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert durch $z(t)=2+3j+3e^{jt}$, $0 \leq t < \pi/4$?

(4) Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung $z \mapsto ze^{j\pi/3}$?

(5) Was für eine Menge komplexer Zahlen wird parametrisiert mit $z(t)=\cos(t)+j\sin^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $0 \leq t < 2\pi$, und in welcher Weise wird die Bahn der Kurve durchlaufen, wenn Sie die Werte von $t$ durch den angegebenen Bereich laufen lassen?

(6) Wie lautet die Konjugierte zu $e^{jt}$, $t \in \mathbb{R}$? Rechnen Sie nunmehr in kartesischen Koordinaten aus: $\frac{1}{e^{jt}-1}$.

(7) Bringen Sie in kartesische Endform: $\frac{1-2j}{2+3zj}$ $(z \in \mathbb{C})$ - für welche Zahlen $z$ ist letzterer Ausdruck überhaupt definiert, und wie müssen Sie $z$ darstellen, um das kartesische Resultat ausrechnen zu können?

(8) Bringen Sie in kartesische Endform - Hinweis: Überlegen Sie gut, was Sie zuerst tun:

$$\frac{1+j}{\frac{1-j}{1+2j}-\frac{2-3j}{1-2j}}$$

(9) Ein Kondensator mit Wechselstromwiderstand $\frac{1}{j\omega C}$ und ein Ohmscher Widerstand $R$ werden in Reihe geschaltet, das Ganze parallel zu einer Spule mit Wechselstromwiderstand $j\omega L$. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand.

(10) Schreiben Sie $f(x)=4\sin(3x+\varphi)$ als Linearkombination einer Sinus- und einer Cosinusfunktion ohne Phasenverschiebung. Bringen Sie umgekehrt den Ausdruck $-2\sin(2x)+4\cos(2x)$ auf die Form $A\sin(2x+\varphi)$.

# Übung (11)

(1) Geben Sie mittels der Additionstheoreme einen Ausdruck für $\cos^2(x)$, in dem kein Quadrat oder Produkt trigonometrischer Funktion mehr zu bilden ist.

(2) Geben Sie zu $g(x) = 4 - 3\sin(2x+1)$ die Abszissenwerte zu allen Maxima und Minima. Skizzieren Sie grob den Graphen mit Koordinatensystem und quantitativen Hinweisen (auf alle gewöhnlich interessierenden Größen) möglichst ökonomisch.

(3) Betrachten Sie die Funktionen mit folgenden Rechenausdrücken: $3\sin x$, $\sin(3x)$, $|\sin x|$, $\sin^2 x$, $\sin\left(x^2\right)$, $1/\sin x$, $\sin(1/x)$. Machen Sie sich jeweils die Unterschiede bei den Graphen klar. Beachten Sie Symmetrien.

(4) Geben Sie eine Funktion an, welche eine Amplitudenmodulation im Sinne einer Schwebung beschreibt: Periodisches An- und Abschwellen der Amplitude einer Schwingung

(5) Lösen Sie die Gleichungen $2^{-3x+1} = 3$ und $\log_6(x) = 5$.

(6) Wenn sich bei exponentiellem Zerfall (etwa radioaktiv) eine Halbierung alle 125 Jahre ergibt - nach welcher Zeit ist das ursprüngliche Material auf 1 Prozent reduziert?

(7) Wie sieht der Graph der Funktion $f(x) = 3x^5$ im Bereich $x > 0$ aus, wenn man für beide Koordinatenachsen logarithmische Skalen wählt, also als neue unabhängige Variable $u = \ln(x)$ und als neue abhängige Variable $v = \ln(f(x))$ einführt?

(8) Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an (vergessen Sie auch nicht, nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen):
   (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   (b) $g(x) = \sqrt{2x-3}$
   (c) $h(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$
   (d) $k(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$

(9) Versuchen Sie einen Rechenausdruck für eine Funktion zu finden, deren Werte über ein Intervall der Breite $2b$, $b > 0$, nahezu konstant mit Wert $c > 0$ sind, dann nach beiden Seiten sehr steil nach Null abfallen, so dass der Wert Null erst asymptotisch erreicht wird.

# Übung (12)

(1) Berechnen Sie folgende Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx}\left(e^x + 5\sqrt[4]{x^3} + x^e + \ln(x) - 3\sin(x)\right)$

(b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}\left(-2x+1\right)^5$

(c) $\frac{d}{dx}(x^a \tan(x))$, $a \in \mathbb{R}$. (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)

(d) $\frac{d}{dx}\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?

(e) $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{\sin(1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.

(f) $\frac{d}{dx}\left(1 - 3x^2\right)^4$ (Kettenregel!)

(g) $\frac{d}{dx}\arctan^3(x)$ (was ist beim Graphen qualitativ anders als bei arctan, und wie äußert sich das in der Ableitung?)

(h) $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x^2 + 1}$, $\alpha$ reellwertige Konstante (Wohin geht die Steigung der Funktion $x \mapsto \sqrt{\alpha x^2 + 1}$ für $x$ gegen den rechten Rand des Definitionsbereiches und für $x \to 0$?)

(i) $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$

(j) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x}{(x+\alpha)^2(x-2)}$ (Achtung, nach $\alpha$ ist abzuleiten!)

(k) $\frac{d}{dx}\log_3(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ $(a > 0)$.

(2) Wohin geht die Steigung der Funktion $g(x) = x + \ln(x)$ für $x \to \infty, x \to 0$? Skizzieren Sie grob den Graphen.

(3) Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ für $x \to -1$? Was bedeutet das graphisch? Wo liegen die Extrema dieser Funktion?

(4) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ bei dem Ausdruck $\frac{d}{dx}e^{-x^2}\sin(x)$.

(5) Geben Sie die Tangentenzerlegung für $f(x) = 1 + 2x - x^4$ an beliebiger Stelle $x_0$.