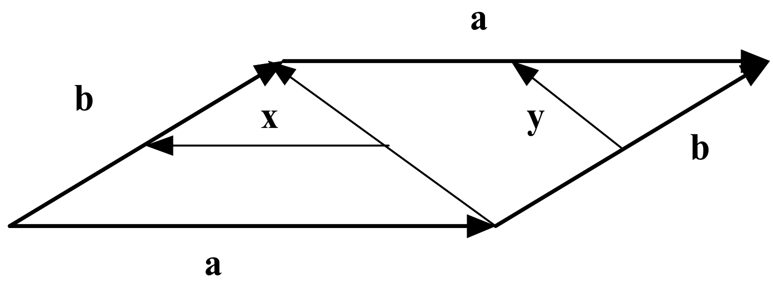
Übung (5)

1. Bringen Sie folgenden Ausdruck der Vektorrechnung in Endform: $\frac{1}{2}\left(\vec{a}-3\vec{b}\right)+\frac{\vec{a}}{4}+\frac{\vec{b}}{3}$.

2. Drücken Sie in folgender Skizze beschriebenen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ durch die gegebenen $\vec{a},\vec{b}$ aus (die gesuchten Vektoren setzen in den Seitenmitten an und sind parallel zu $\vec{a}$ bzw. zur Diagonalen:



3. Seien die Geraden g und h gegeben durch $\vec{x}_g\left(\lambda\right)=(1,2,3)+\lambda\left(1,-1,2\right),\lambda\in\mathbb{R}$, und $\vec{x}_h\left(\mu\right)=\mu\left(-2,2,-4\right),\mu\in\mathbb{R}$.

   (a) Wie kann man sofort sehen, dass g und h parallel liegen und sich nicht schneiden?

   (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, die mitten zwischen g und h verläuft.

   (c) Geben Sie eine Parameterdarstellung für eine Gerade, die in der von g und h bestimmten Ebene verläuft, aber nicht parallel zu g liegt.

   (d) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene, in der g und h liegen, und zwar so, dass man leicht erkennen kann, welche Punkte dieser Ebene zwischen g und h liegen ('zwischen': die Geraden g und h selbst ausgeschlossen). Geben Sie dann ein einfaches Kriterium dafür.

4. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E, auf der folgende Gerade g und der Punkt P liegen: $\vec{x}_g\left(\lambda\right)=(2,1,2)+\lambda\left(3,-1,1\right),\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{x}_P=(2,3,-2)$. Stellen Sie zunächst 'mit bloßem Auge' fest, dass P nicht auf g liegt.

5. Auf welcher Ebene liegt die Parabel, die parametrisiert ist durch $\vec{x}\left(t\right)=(1,2,2)+t\left(1,-1,3\right)+\frac{1}{2}t^2\left(2,3,-1\right)$, $t\in\mathbb{R}$? (Geben Sie für diese Ebene eine Parameterdarstellung an.) Deuten Sie t als Zeit, und beschreiben Sie eine Bewegung eines Punktes durch dieselbe Parabel, so dass der Ort $\vec{x}(1)$ zur Zeit $t=0$ erreicht wird.

6. Schneiden Sie die Ebenen E und F, welche im dreidimensionalen Raum durch folgende Gleichungen gegeben sind: $E: 3x-2y+2z=1$, $F: -2x+2y-3z=1$.

7. Schneiden Sie die Ebene E der vorigen Aufgabe mit der Ebene H, welche gegeben ist durch $\vec{x}_H(\lambda,\mu)=\lambda(2,1,1)+\mu(-2,2,-1)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

8. Beschreiben Sie verbal, wie Sie von zwei durch die Ortsvektoren der Endpunkte vorgegebenen Strecken $\overline{PQ}$ und $\overline{RS}$ feststellen können, ob sie einander schneiden.

9. Beschreiben Sie eine (wie üblich irgendwie schiefe) Tüte mit lauter elliptischen Querschnitten als idealisierte Fläche.

Übung (6)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{aligned} x - 2y + 2u - 3v &= 1 \\ -3x - 2u + v &= 0 \\ 2x + 3y + u - 2v &= 0 \end{aligned}$$

2. Sagen Sie wiederum geometrische Deutung und formale Struktur der Lösungsmenge voraus. Lösen Sie dann (unter Nutzung der Besonderheiten des Systems):

$$\begin{aligned} u - 2v &= 3 \\ 2v - w &= 4 \\ 3w - 2u &= 5 \end{aligned} \quad .$$

3. Betrachten Sie das folgende lineare Gleichungssystem für beliebigen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= a \\ 4x + 5y + 6z &= b \\ 7x + 8y + 9z &= c \end{aligned} \quad .$$

   (a) Geben Sie allgemein die Lösungsmenge an. (Fallunterscheidung!)

   (b) Geben Sie aufgrund von a. eine Parametrisierung für die Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, für die das System lösbar ist.

   (c) Welche Parametrisierung könnten Sie für die Menge aus b. sofort angeben, wenn Sie nur wüssten, dass für das vorliegende System $A\vec{x} = \vec{b}$ (in Matrixform geschrieben - geben Sie selber A an) gilt: $\dim(Bild(A)) < 3$?

4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (x, y: Unbestimmte, a äußerer Parameter)

$$\begin{aligned} (a+3)x + 3ay &= 1 \\ -3x + ay &= 0 \end{aligned}$$

   Schreiben Sie das System auch in Matrixform, und berechnen Sie die Determinante der Matrix. Was hat sie mit Ihren Lösungen zu tun?

5. Betrachten Sie das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (3, 2, 4), \vec{x}_Q = (-2, 1, -2)$, $\vec{x}_R = (2, 1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Seitenhalbierende, die von P ausgeht - fassen Sie die Seitenhalbierende als Strecke auf.

6. Seien n Ortsvektoren $\vec{x}_i$ gegeben, $1 \le i \le n$. Betrachten Sie die Menge aller Punkte, deren Ortsvektoren sich schreiben lassen als $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{x}_i$, mit $0 \le \alpha_i$ für alle i und $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Zeigen Sie, dass diese Punktmenge folgende Eigenschaft hat: Enthält sie die Punkte P und Q, so enthält sie auch deren gesamte Verbindungsstrecke. (Solch eine Punktmenge nennt man konvex.)

Übung (7)

1. Berechnen Sie für folgende Matrizen und Vektoren jeweils „Matrix mal Vektor", so weit das definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\; \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\; \vec{x}_2 = (3)\,.$$

   Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar ist. Was für Matrizen könnte man formal korrekt auf $\vec{x}_2$ anwenden?

2. Seien A, B, C die Matrizen der vorigen Aufgabe. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$, $B\vec{y} = \vec{0}$, $C\vec{z} = 0$ sagen? (Unbestimmter Vektor und Nullvektor jeweils passender Länge natürlich.) Rechnen Sie sie nunmehr auch aus. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen beliebiger inhomogener Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, $B\vec{y} = \vec{c}$, $C\vec{z} = \vec{d}$ sagen?

3. Betrachten Sie folgende Abbildung: $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y + z \\ 3x - 2y + z \\ -2x + y \end{pmatrix}$. Ist sie linear? Wenn ja, so geben Sie die Matrix A an, so dass $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$ wird. Was entsteht, wenn man A auf die Gerade g anwendet, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 2, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$? (Geometrische Deutung und passende quantitative Beschreibung der Menge $\{A\vec{x}_g(\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ sind also gefragt.)

4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 30 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, den Cosinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen. Wandeln Sie die Matrix so ab, dass die Drehung um 30 Grad um den Ursprung im Uhrzeigersinn herauskommt. Was sollte also das Produkt beider Matrizen ergeben? Prüfen Sie das durch Rechnung nach.

5. Überlegen Sie, wie man Matrizen so zu verknüpfen hätte, dass die Summe der Abildungen daraus entsteht, also $(A \circ B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$ allgemeingültig wird. (Hier steht '$\circ$' für diese Operation, die man dann tatsächlich '+' schreibt.) Sagen Sie auch dazu, welche Voraussetzungen die Matrizen A, B erfüllen müssen, damit das funktioniert (die rechte Seite der Gleichung sagt es Ihnen, Sie müssen nur nachschauen, unter welchen Umständen das einen sinnvollen Ausdruck der Vektorrechnung ergibt.

6. Welche $(3 \times 3)-$ Matrix vertauscht die Komponenten eines Eingabevektors so, dass die erste Komponente an die zweite Stelle rückt, die zweite Komponente an die letzte Stelle?

7. Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der $yz-$ Ebene (im $\mathbb{R}^3$) aus?

8. Warum ist die Spiegelung im $\mathbb{R}^3$an der Ebene $x = 3$ keine lineare Abbildung? Drücken Sie aber die Spiegelung an der Ebene $x = 3$ immerhin möglichst einfach unter Verwendung der Matrix aus 7. aus.

Übung (8)

Alle hier betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen!

1. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (5, -3, -1)$.

2. Begründen Sie, dass $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Geben Sie also einen Vektor in Richtung von $\vec{a} = (1, 3, -2)$ der Länge 1 an.

3. Finden Sie ganz leicht zum Vektor $(1, -2, 3)$ einen solchen, der senkrecht dazu steht und nicht der Nullvektor ist. Wenden Sie das an, um für eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ der Form $y = mx + b$, $m \neq 0$, die Steigung einer jeden dazu senkrechten Geraden zu finden.

4. (a) Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.

   (b) Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) - 3\vec{a}\left(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}\right)$

5. Warum ist $3\vec{x} + \vec{x}\vec{y}$ kein sinnvoller Ausdruck der Vektorrechnung?

6. Wie können Sie den Ausdruck $\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|$ vereinfachen? Warum kann es keinesfalls sein, dass da allgemein $\left|\vec{b}\right|$ herauskommt?

7. Welchen Winkel bildet die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$ Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).

8. Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor. Rechnen Sie abstrakt nach (also ohne Koordinatendarstellungen), dass die Abbildung $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2}\vec{a}\vec{x}\right)\vec{a}$, linear ist. Geben Sie anhand der Komponentendarstellung $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ die Matrix zu $\vec{f}$.

9. Warum darf man nicht einfach $\vec{a}^2\vec{b}^2$ mit $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$ identifizieren? Geben Sie zunächst ein konkretes Gegenbeispiel an. Zeigen Sie dann, dass die Resultate für linear abhängige $\vec{a}, \vec{b}$ stets gleich sind. Rechnen Sie dann noch nach, dass $\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$ stets den quadrierten Flächeninhalt des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ergibt. Hinweis: Arbeiten Sie für diesen Flächeninhalt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels, den Sie wiederum über den Cosinus erhalten.

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Geben Sie zu folgende Skizze die Koordinatendarstellung des im kleinen Kreis eingezeichneten freien Vektors, der einen Winkel von 45 Grad mit den Koordinatenachsen bilde. Geben Sie ferner die Koordinatendarstellung von $\vec{x}_P$:

2. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks PQR, $\vec{x}_P = (2,3,4)$, $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$, $\vec{x}_R = (3,1,1)$.

3. Zerlegen Sie den Vektor $(1,2,3)$ als Summe zweier Vektoren, von denen einer parallel zu $(2,-1,2)$ und einer senkrecht zu $(2,-1,2)$ steht.

4. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1,2,2) + \lambda(2,1,-1) + \mu(2,-3,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der $xy-$ Ebene sowie zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P, $\vec{x}_P = (3,4,3)$. Spiegeln Sie E an der durch P gehenden parallelen Ebene. (Achten Sie darauf, was man als Resultat zur letzten Frage angeben sollte!)

5. Sei die Ebene E gegeben durch $2x + 3y - z = 1$, die Gerade g.durch $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(1,2,3)$. Die Ebene H stehe senkrecht auf E und enthalte die Gerade g. Geben Sie eine Normalenform für H.

6. Schauen Sie sich die Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = (3,2,-2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (4,-3,3)$ an. Lösen Sie nun die Gleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, indem Sie an die Gleichung geeignete Vektoren skalar anmultiplizieren.

7. Ein Lichtstrahl fällt entlang der Geraden $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,3) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die $xy-$ Ebene und wird dort reflektiert. Beschreiben Sie mit einer Parameterdarstellung die Bahn des ausfallenden Strahls.

8. Die Ebene $x + y + z = 1$ wird mit einem Winkel von 30 Grad um die $z-$ Achse gedreht (Entgegen dem Uhrzeigersinn, wenn man von 'oben' (also einem Punkt mit positiver $z-$ Koordinate auf der $z-$ Achse) auf die $xy-$ Ebene schaut. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die resultierende Ebene.

9. Sei $\vec{a} = (1,2,-3)$. Geben Sie die Gleichung $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ in Matrixform an, und untersuchen Sie das Lösungsverhalten für beliebigen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

10. Eine Leiter der Länge l steht an eine Wand gelehnt, im Winkel α zum Boden, auf der die Wand senkrecht steht. Auf der Leiter an beliebiger Stelle steht jemand. Es wirkt nur die Gravitationskraft $(0,-mg)$. Die Leiter verhalte sich (idealisierend) vollkommen starr. (Man stelle das Problem zweidimensional dar.) Welche Seitenkraft muss die Wand aushalten? Es werde angenommen, dass die Leiter nicht wegrutsche, die kompensierende Reibungskraft also groß genug sei. Man mache insbesondere die Abhängigkeit des Resultates von α und der Leiterposition klar.