Übung (3)

(1) Zeichnen Sie grob mehrere Dichtefunktionen auf ein und demselben endlichen Intervall. Denken Sie insbesondere an 'J-Form', Glockenform, Gleichverteilung und 'U-Form'. Vergleichen Sie die Streuungen miteinander. Zeichnen Sie auch grob die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

(2) Zeichnen Sie zu folgenden Daten zu jährlichen Fahrleistungen von Autos ein Histogramm und auch den Graphen der Verteilungsfunktion, welche genau zur Histogrammidealisierung gehört, und lesen Sie vom Graphen den Median ab. Rechnen Sie den Median auch aus.

Fahrl. in Tausend km	$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$	$20-30$	$30-100$
relative Häufigkeit	0.05	0.15	0.3	0.2	0.1	0.2

Welchen Näherungswert können Sie für μ geben?

(3) Eine Variable X tendiere in einer Bevölkerung zu den Extremen (an beiden Rändern eines endlichen Intervalls), und zwar sei es gleich wahrscheinlich, zu welchem Extrem jemand tendiert (die Zwischenwerte mögen ebenfalls vorkommen, jedoch deutlich seltener): Wie sieht (idealisiert) eine solche Dichte aus und wie die zugehörige Verteilungsfunktion?

(4) Wenn der IQ (Intelligenzquotient gemäß einem gängigen Testverfahren) normalverteilt ist mit Mittelwert 100 und Streuung 15:
   (a) Wie lautet dann das 95%-Vertrauensintervall [99%-Vertrauensintervall] symmetrisch um den Mittelwert?
   (b) Wie lautet das linksseitige 95%-Vertrauensintervall?
   (c) Wie hoch ist der Populationsanteil mit einem IQ über 145?

(5) Von einer normalverteilten Variablen wissen Sie: Die Wahrscheinlichkeit für einen Wert unter 80 ist 0.1, und die Wahrscheinlichkeit für einen Wert über 100 ist 0.2. Wie lauten dann μ und σ der Verteilung?

Übung (4)

(1) Wie viele Elemente hat $A \times B \times C$, wenn A 10 Elemente hat, B 12 Elemente und C 2 Elemente?

(2) Wie viele Teilmengen mit genau 4 Elementen hat eine Menge von 16 Elementen?

(3) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man bei 30 Würfen mit einem (gewöhnlichen, symmetrischen) Würfel genau drei Sechsen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man dabei *mindestens* drei Sechsen? (Rechnen Sie das möglichst praktisch!)

(4) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man bei 300 Würfen mit einem Würfel wenigstens 30 Sechsen? (Nutzen Sie näherungsweise Rechnung mit der passenden Normalverteilung, und verwenden Sie dabei Stetigkeitskorrektur.) Warum ist das Resultat *nicht* dasselbe wie bei der zweiten Frage der letzten Aufgabe?

(5) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass man folgendes Resultat oder ein extremeres (nach der einen *oder* der anderen Seite) findet, wenn man von 12 Patienten rein zufällig 6 für eine gewisse Therapie auswählt, den Rest ohne Therapie belässt:

	geheilt	nicht geheilt
mit Therapie	5	1
ohne Therapie	1	5

.

(6) Experiment: Es wird zwei mal nacheinander gewürfelt. A sei das Ereignis: 'Das Resultat des ersten Wurfes ist eine gerade Zahl', B sei das Ereignis: 'Die Augensumme beider Würfe liegt unter 6'. Klären Sie durch Rechnung, ob A und B ein abhängiges Ereignispaar bilden. Versuchen Sie die Sache auch intuitiv zu verstehen.

(7) Worauf müssen Sie (mindestens) achten, wenn Sie aufgrund der Anzahl der mitverschuldeten Unfälle die Fahrsicherheit von verschiedenen Autofahrergruppen vergleichen wollen?

Übung (5)

(1) Sie beobachten in einer Zufallsstichprobe von 100 Leuten genau 26, die eine gewisse Eigenschaft haben. Auf welchem Niveau können Sie die Hypothese verwerfen, diese Eigenschaft komme mit einer relativen Häufigkeit von höchstens 0.2 in der Gesamtpopulation vor (aus der die Stichprobe als Zufallsstichprobe gezogen ist)?

(2) Für eine spezielle Teilpopulation A gelte, dass der IQ darin (nennen wir diese Variable X_A) dieselbe Streuung $\sigma(X_A) = 15$ hat wie in der Gesamtpopulation. In einer Stichprobe vom Umfang 50 aus der Teilpopulation finden Sie einen empirischen Mittelwert $\overline{x}_A = 90$. Auf welchem Niveau können Sie die Hypothese verwerfen, der IQ in A habe einen Mittelwert von mindestens 95?

(3) Stellen Sie sich vor, jemand wolle anhand einer Stichprobe vom Umfang 50 die Hypothese testen, eine gewisse Eigenschaft komme in einer (großen) Population mit einer relativen Häufigkeit von höchstens 0.3 vor. Es werde auf dem Niveau 0.95 getestet.
   (a) Bestimmen Sie als Testende(r) den Verwerfungsbereich.
   (b) Nun liege tatsächlich folgende Situation vor: Die wirkliche relative Häufigkeit in der Population sei 0.35. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommen Sie als Testende(r) zum (korrekten) Verwerfen der Hypothese anhand Ihres empirischen Befundes? Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Sie also den Fehler 2. Art machen, die (falsche) Hypothese nicht zu verwerfen?
   (c) Sie haben gerade die Wahrscheinlichkeit β für den Fahler 2. Art im konkreten Beispiel ausgerechnet. Überlegen Sie, von welchen Parametern β allgemein abhängt und wie diese Abhängigkeit aussieht. (Formulieren Sie also korrekte Aussagen der Gestalt: 'Ändert man ... (bei Belassen aller andern Parameterwerte), so wird β kleiner'.)

(4) Skizzieren Sie *grob* die Graphen folgender Funktionen (nachdem Sie zuvor die Fragen nach maximalem reellem Definitionsbereich, eventuellen Symmetrien, Polen und eventuell asymptotischem Verhalten für $x \to \infty$, $x \to -\infty$ beantwortet haben):
   (a) $f(x) = -x^4 - 3$
   (b) $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$
   (c) $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$
   (d) $k(x) = 1 - e^{-2x}$
   (e) $l(x) = \sqrt{-3x+1}$

(5) Formen Sie den Ausdruck $\ln\left(5x^4\right)$ derart um, dass man erkennt, dass er linear in $\ln(x)$ ist. (Man könnte die Frage auch so stellen: Drücken Sie $\ln(5x^4)$ in $\ln(x)$ aus.)

(6) Lösen Sie die Gleichung $3^{-4t} = 5$.

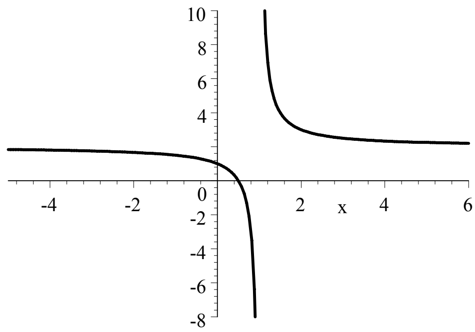
Übung (6)

(1) Welches 2-seitige 95%-Vertauensintervall für die Anzahl der täglich mit Telefonieren verbrachten Stunden können Sie geben, wenn Sie in einer Zufallsstichprobe folgende Werte finden: 0.7, 1, 1.3, 1.4, 0.8, 2.2, 0.9, 1.5, 1.2, 1.3? Auf welchem Niveau könnten Sie anhand dieser Daten die Hypothese verwerfen, die mittlere tägliche Telefonierzeit der betreffenden Population betrage höchstens eine Stunde? Denken Sie darüber nach, was Sie anlässlich des Befundes über letztere Hypothese wirklich denken würden.

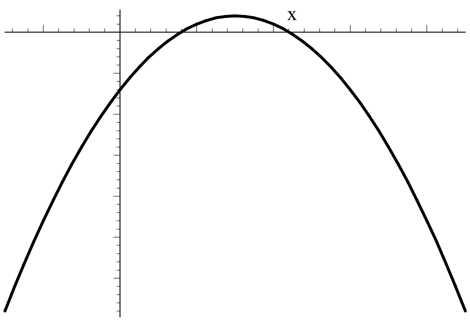
(2) Sie beobachten in einer Patientengruppe vom Umfang 100, welche Sie mit Therapie A behandelt haben, eine mittlere Abklingzeit der Krankheitssymptome von 10 Tagen, mit einem Streuungsschätzwert von 2 Tagen. In einer mit Therapie B behandelten Patientengruppe des Umfangs 120 beobachten Sie eine mittlere Abklingzeit von 16 Tagen bei einem Streuungsschätzwert von 4 Tagen. (In beiden Fällen handele es sich um Zufallsstichproben.) Mit welcher Sicherheit können Sie *behaupten*, bei Therapie A liege die mittlere Abklingzeit um wenigstens 5 Tage unter der bei Therapie B?

(3) Finden Sie Rechenausdrücke für Funktionen, deren Graphen grob so aussehen:

(a)



(Hier soll ein Pol bei $x = 1$ liegen, und die Gerade $y = 2$ soll Asymptote des Graphen für große $|x|$ sein.)



(b) (Der Scheitel habe dabei die Koordinaten $(3, 2)$.)

(4) Skizzieren Sie grob die Graphen zu den folgenden Funktionen im jeweils maximalen reellen Definitionsbereich, zu denen folgende Rechenausdrücke gehören:
 (a) $f(x) = \frac{x}{1-x^3}$,
 (b) $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
 (c) $h(x) = xe^x$,
 (d) $k(x) = x - 5\ln(x)$

(5) Bilden Sie folgende Ableitungen:
 (a) $\frac{d}{dx}\left(2e^x - \ln(x) + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)$,
 (b) $\frac{d}{dx}(xe^{-x})$ (Nutzen Sie das, um die Extremwertfrage für die betreffende Funktion auch quantitativ zu klären.)
 (c) $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}\ln(x))$ (Wie verhält sich das für $x \to 0$ $(x > 0)$, wie für $x \to \infty$?
 (d) $\frac{d}{dx}\frac{1-x}{2+x^2}$. Sehen Sie, wie sich diese Ableitung für $x \to \infty$, $x \to -\infty$ verhält?
 (e) $\frac{d}{dx}\left(xe^{-x^2}\right)$ (Nutzen Sie das für die quantitative Klärung der entsprechenden Extremwertfrage.)
 (f) $\frac{d}{dt}e^{xt^2}$, $\frac{d}{dx}e^{xt^2}$.