Erste Aufwärmübung

(1) Rechnen Sie aus:
   (a) $\frac{2}{28} - \frac{3}{20}$
   (b) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{-10}$ (Kürzen!)
   (c) Sie sehen den Hauptbruchstrich an der Höhe des Gleichheitszeichens (!); rechnen Sie aus:

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{-3}{5}} =$$

(2) Lösen Sie die Klammer auf: $x - (3a + 3b - 5c)$

(3) Schreiben Sie als Summe von zwei Brüchen: $\frac{3a-2b}{4abc}$

(4) Vereinfachen Sie den Bruch $\frac{x-1}{x^2-1}$. Merken Sie dabei an, für welche Werte von x die Gleichung gilt, die Sie hinschreiben.

(5) Vereinfachen Sie $(3a - b)(2a + b) + (3a - b)(-3a - b)$, und machen Sie sich dabei bewusst, welche Rechenregeln Sie anwenden.

(6) Vereinfachen Sie

$$\frac{a^7 b^5}{a^{-3} b^3 c^4}, \qquad \frac{1}{\sqrt{3} - a} + \frac{2}{\sqrt{3} + a}, \qquad \frac{1}{\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a}}.$$

(7) Lösen Sie die Gleichung $2x - 3\,(x - 3) = 5\,(x + 1)$.

(8) Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{3}x - \left(\sqrt{7} - \sqrt{7}x\right) = \sqrt{7}$.

(9) Welche reellen Lösungen hat die Gleichung $x^2 - 15 = 0$? Welche reellen Lösungen hat $x^2 + 15 = 0$?

(10) Bringen Sie die Gleichung $-2\left(x^2 - x\right) - 3\left(x - 2x^2\right) = (x + 1)^2 + 3x + 1$ auf die Normalform $x^2 + px + q = 0$, und geben Sie alle Lösungen der Gleichung an.

(11) Setzen Sie im Ausdruck $x^2 + (a + b)x - 1$ für x den Ausdruck $2x - 3$ ein, und vereinfachen Sie den resultierenden Ausdruck. Ordnen Sie im Resultat nach Potenzen von x.

(12) Welchen Wert hat der Rechenausdruck $\sqrt[5]{32}$? Vereinfachen Sie auch so weit wie möglich: $\sqrt{8}$.

(13) Welche Gerade in der $xy-$ Ebene wird durch $y = -\frac{4}{3}x + 2$ beschrieben? Welche geometrische Interpretation haben die Zahlen $-\frac{4}{3}$ und 2 darin? Zeichnen Sie die zugehörige Gerade in ein Koordinatenkreuz ein.

(14) Welchen Schnittpunkt hat die Gerade, welche durch die Gleichung $y = 3x - 4$ beschrieben ist, mit der Geraden aus Aufgabe 13?

(15) Nehmen Sie folgende *Definition* für $\frac{a}{b}$, für $b \neq 0$: $\frac{a}{b}$ ist *die einzige Lösung* x der Gleichung $xb = a$. Zeigen Sie damit, dass für $b \neq 0$ gilt: $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$.

Übung (1)

(1) (a) Lösen Sie die Gleichung $2a + \frac{4}{5}t = 1$ (a äußerer Parameterm Unbekannte: t)
(b) Lösen Sie die Gleichung (in der Unbekannten t) $c + t\frac{3}{\sqrt{n}} = 4$.
(c) Wie groß muss n mindestens sein, damit $c\frac{10}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1000}$ wird? Geben Sie die kleinste *natürliche* Zahl an, welche diese Ungleichung erfüllt.
(d) Lösen Sie die Gleichung $x^2 + ax - 2 = 0$, allgemein mit äußerem Parameter $a \in \mathbb{R}$. (Unbekannte ist x.)

(2) Welche Ungleichung zwischen $-a$ und $-b$ können Sie folgern aus $a < b$? Welche Ungleichung zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ können Sie folgern aus $0 < a < b$? (Es werden hier keine formalen Beweise erwartet, sondern nur anschauliches Verständnis mittels der Zahlengeraden. Allerdings dürfen Sie sich auch herausgefordert fühlen, formale Beweise mittels der Grundaxiome zu Zahlkörpern mit Anordnung zu führen.)

(3) Nehmen Sie die Daten zur Variablen $X =$ 'Geschwisterzahl in Ihrer Übungsgruppe'. Beschreiben Sie in Worten die Zuordnung X. Was müssen Sie also die Kommilitonen fragen? Beschreiben Sie nun die Verteilung von X, zunächst mit einer geeigneten Tabelle, dann mit einem Stabdiagramm. Berechnen Sie auch den Mittelwert. Denken Sie sich zwei *andere* Geschwisterzahlverteilungen aus, welche jedoch denselben Mittelwert besitzten. Machen Sie sich anschließend Gedanken darüber, inwiefern Ihre empirische Verteilung von der Verteilung der Variablen $Y =$ 'Geschwisterzahl in der Bevölkerung der BRD' abweicht, auch schon darüber, ob das Zufall ist oder doch ein Effekt der Auswahl aus der Teilpopulation der Psychologiestudenten vorliegt. (Letztere Frage können Sie jetzt natürlich noch nicht genauer behandeln, sondern nur ganz intuitiv.) Wichtig ist es nur, dass Sie die Fragestellung als ganz natürliche verstehen und später einzuführende Methoden daher als etwas Sinnvolles zu schätzen wissen.

(4) Beschreiben Sie die folgenden Begriffe als mathematische Zuordnungen - dabei gibt es für den Definitionsbereich im allgemeinen viele Möglichkeiten, von denen Sie jeweils einige sehen sollten); prüfen Sie auch, in welchen Fällen man einen komplexeren Wertebereich anzusetzen hätte als nur $\mathbb{R}$. Die Aufgabe soll bei Ihnen eine Vorstellung davon aufkeimen lassen, dass man mit diesen Zuordnungen viel Komplexeres und daher Interessanteres beschreiben kann als mit einzelnen Zahlen.
(a) Bevölkerungsdichte
(b) Studentenzahlen in Deutschland - denken Sie hier nicht etwa, es sei lediglich die Zahl der Studenten anzugeben, eventuell noch der Anteil der Studenten an der jungen Gesamtbevölkerung, sondern denken Sie an *viel Informativeres*!
(c) Testresultat eines psychologischen Tests mit 3 Untertests, die jeweils 20 Items haben (also Fragen bzw. Aufgaben), bei 100 Versuchspersonen, die jeweils unter verschiedenen Randbedingungen (Umfeldbedingungen, z.B. Lärmbelästigung / Ruhe, etc.) mit unabhängig wiederholt werden (mit neuen, aber hinsichtlich des Inhalts gleichwertigen Items). Überlegen Sie auch, wie eine geeignete Tabelle aller Daten strukturiert werden könnte.

Übung (2)

(1) Skizzieren Sie grob die Form der Verteilung von der Variablen 'Monatseinkommen in der BRD', unabhängig von den anzubringenden Präzisierungen - welche Präzisierungen benötigt man in diesem Beispiel eigentlich, um eine ordentliche Definition einer Variablen zu bekommen (denken Sie auch über einige Alternativen nach)?.

(2) Geben Sie ein weiteres Beispiel für eine Variable, deren Verteilung qualitativ dieselbe Form hat wie die der Variablen 'Geschwisterzahl' (in der Gesamtpopulation). - Geben Sie ein Beispiel für eine bimodale (d.h. zweigipflige) Verteilung.

(3) Zeigen Sie: $\sigma(X) = 0$ genau dann, wenn X nur einen einzigen Wert annimmt, also konstant ist.

(4) Vorbemerkung: Setzen Sie wieder voraus, dass X nur endlich viele Werte annimmt. Man definiert zu X und $c \in \mathbb{R}$ die neue Variable $X + c$ vermöge $(X + c)(\omega) = X(\omega) + c$, die neuen Werte entstehen also durch Addition von c zu den Werten von X. Analog bildet man cX für eine Konstante c. Sie kennen nun von der Variablen X die Werte $\mu(X)$ und $\sigma(X)$. Zeigen Sie (d.h. hier: Rechnen Sie nach):
   (a) $\mu(X + 1) = \mu(X) + 1$
   (b) $\sigma(X + 1) = \sigma(X)$
   (c) $\mu(cX) = c\mu(X)$
   (d) $\sigma(cX) = |c|\,\sigma(X)$.

(5) Eine Variable X nehme nur die Werte 1 und 0 an, 1 mit Wahrscheinlichkeit p, $0 < p < 1$.
   (a) Berechnen Sie (allgemein, in Abhängigkeit von p) $\mu(X)$.
   (b) Berechnen Sie die Varianz von X (ebenso allgemein).
   (c) Berechnen Sie den Wert p, für welchen die Varianz maximal wird. (Dafür genügt es, den entstehenden quadratischen Rechenausdrcuk auf Scheitelpunktsform zu bringen - Sie benötigen nicht etwa die Ableitung des Rechenausdrucks.

(6) Sie unterziehen zwei Gruppen von Menschen einem Test, nachdem Sie die eine Gruppe einem (der Aufgabenart entsprechenden) Training unterzogen haben, die andere nicht. Der Testvergleich soll Auskunft über die Nützlichkeit eines solchen Trainings geben. Was müssen Sie beachten, welche weitere Vorsorge treffen, damit Sie überhaupt daran denken können, eine Aussage über die Qualität des Trainings zu erhalten?

(7) Wie würden Sie die Kommunikationsstruktur innerhalb einer Arbeitsgruppe (sagen wir von fünf bis zehn Menschen) darstellen?