Probeklausur und Aufgaben zum Wochenende

(1) (a) Seien $\vec{x}_P = (0,2,3)$, $\vec{x}_Q = (1,-1,2)$, $\vec{x}_R = (1,2,2)$ in einem kartesischen System gegeben.

(i) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{PQ}$.

(ii) Betrachten Sie das Dreieck PQR. Welchen Winkel bildet die Seitenhalbierende, welche durch R geht und die Seite $\overline{PQ}$ halbiert, mit der Seite $\overline{PQ}$?

(iii) Zeigen Sie allgemein, dass eine Seitenhalbierende einer Dreieckseite genau dann senkrecht auf der betreffenden Dreieckseite steht, wenn die beiden restlichen Dreieckseiten gleich lang sind. (Hinweis: Beschreiben Sie das Dreieck mit freien Kantenvektoren $\vec{a}, \vec{b}$, also nur der Form nach, nicht umständlich der Lage nach durch drei Eckpunkte.)

(b) (Wiederum kartesisches System.) Betrachten Sie die Ebenen E, gegeben durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$, und F, gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x}_F(\lambda, \mu) = (1,2,1) + \lambda(-1,2,2) + \mu(2,-1,2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) In welchem Punkt schneidet E die $x-$ Achse?

(ii) Worin schneidet F die $xy-$ Ebene?

(iii) Schneiden Sie E mit F.

(iv) Welchen Winkel bildet F mit E?

(c) Sei eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ mit folgender Matrix: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Worauf bildet diese Matrix das Parallelogramm der Punkte $\lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ab, $0 \le \lambda, \mu \le 1$? Welche geometrische Deutung hat die resultierende Menge?

(2) (a) Lösen Sie folgende Gleichung in $\mathbb{C}$: $\frac{1}{1-3j} + \frac{1}{2+4jz} = 1 + j$.

(b) Seien die Zahlen $Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ gegeben, mit festen Zahlen $R, L, C > 0$, während ω variiere im Bereich aller Werte > 0.

(i) Bringen Sie $Z(\omega)$ auf kartesische Endform.

(ii) Für welche Werte von ω wird $Z(\omega)$ reell?

(iii) Welche Menge komplexer Zahlen wird mit $Z(\omega)$, $\omega > 0$, durchlaufen, und wie wird sie mit den Werten von ω durchlaufen?

(3) (a) Wie muss bei exponentiellem Wachstum die Vervielfachung pro Jahr sein, damit in 10 Jahren ein Vervielfachungsfaktor von 20 erreicht wird?

(b) Geben Sie alle Abszissenwerte der Minima von $\cos(4x-2)$.

(c) Skizzieren Sie grob qualitativ den Graphen der Funktion $f(x) = x\sqrt{1+x}$.
Insbesondere sollten Sie den maximalen reellen Definitionsbereich angeben. Geben Sie auch eine einfachere Funktion an, welche das asymptotische Verhalten von f für $x \to \infty$ beschreibt. Lösen Sie die Extremwertfrage zu f quantitativ.

(d) *) (Kartesisches System vorausgesetzt.) Gegeben ist die Ebene E durch $2x - 3y + z = 1$. Ein Kreis liegt auf E, sein Radius ist 5, sein Mittelpunkt $(1,1,2)$. Geben Sie eine Parametrisierung dieses Kreises (gemeint ist genau der Kreisrand, also eine Kurve).

Zusätzliche Aufgaben (nicht zur Probeklausur)

(1) Geben Sie eine Näherung erster Ordnung für $\arctan(0.01)$ und für 2.1^3. (Hinweis: Sie müssen selber x_0 passend wählen!)

(2) Berechnen Sie $\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}$, $\frac{d}{dx}\sin(\sin(x))$, $\frac{d}{da}\frac{ax-e^a}{1-a^2}$, $\frac{d}{dx}\ln^2\left(1+\sin^3(2x)\right)$, skizzieren Sie auch die Graphen der ersten beiden Funktionen, die hier abzuleiten sind.

(3) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ist.