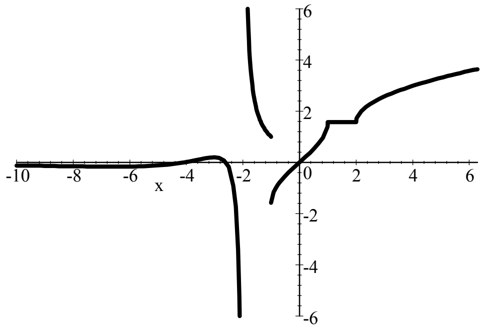
Aufgaben zum Wochenende (3)

1. Das Dreieck ABC sei gegeben mit $\vec{x}_A = (1,2,2)$, $\vec{x}_B = (-2,1,3)$, $\vec{x}_C = (2,3,-1)$.
   (a) Geben Sie eine Normalenform für die Ebene, welche die Strecke $\overline{AB}$ in der Mitte senkrecht durchschneidet.
   (b) Geben Sie eine Paramterdarstellung für die Höhe des Dreiecks, welche durch A geht. (Diese „Höhe" ist die Strecke von A bis zum Lotfußpunkt des Lotes von A auf die Gerade durch B und C.)
   (c) Berechnen Sie den Dreieckswinkel im Punkt A.
   (d) Berechnen Sie die Koordinatendarstellung des Punktes in der Dreiecksebene, welcher von allen Eckpunkten gleich weit entfernt ist.
   (e) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte des Raums, welche von allen drei Eckpunkten gleich weit entfernt sind.
2. (a) Zeigen Sie zunächst, dass folgende Geraden g, h windschief zueinander liegen (also nicht parallel sind und einander nicht schneiden): $\vec{x}_g(\lambda) = (2,1,0) + \lambda(1,2,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_h(\mu) = (2,1,1) + \mu\,(2,-1,3)\,,\ \mu \in \mathbb{R}$.
   (b) Berechnen Sie nunmehr den Abstand zwischen g und h, indem Sie einmal einen Vektor senkrecht zu beiden Geraden suchen, der zugleich einen Punkt von g mit einem von h verbindet.
   (c) Führen Sie auch die Idee durch, dass man zwei parallele Ebenen durch die Geraden legt, so dass der Abstand zwischen diesen Ebenen dem Abstand der Geraden gleichkommt.
3. Berechnen Sie $z = \frac{e^{-j\varphi}}{1+e^{j\varphi}}$ in kartesischer Endform (vorausgesetzt ist, dass φ eine reelle Zahl ist).
4. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem:
$$\begin{aligned} 2jz_1 - (3+j)z_2 &= 1+2j \\ (1-j)z_1 + 3z_2 &= 0. \end{aligned}$$
5. Überlegen Sie, wie die Graphen aussehen zu den Funktionen (im stets anzugebenden maximalen reellen Definitionsbereich) $u(x) = x + e^x$, $f(x) = xe^{-x}$, $g(x) = e^{\sqrt{x^2-x-2}}$, $h(x) = \ln(1-|x|)$.
6. Produzieren Sie eine Funktion, deren Graph punktsymmetrisch zum Ursprung liegt, die genau ein Maximum links von der $y-$ Achse hat und die gegen Null geht für $x \to \pm\infty$.
7. Führen Sie die Tangentenzerlegung von $f(x) = x^4$ durch für eine beliebige Stelle x_0. Nutzen Sie dazu die Binomialformel. Konkretisieren Sie für $x_0 = 3$, und geben Sie die Näherung erster Ordnung für $f(3.1)$ an. Geben Sie dazu auch den absoluten, den relativen und den lokalen Fehler an.

Übung (12)

1. Wie sähe zu folgendem Funktionsgraphen (grob qualitativ) der Graph der Ableitungsfunktion aus? (Die beiden linken Äste sollen durch einen Pol getrennt sein, der Funktionswert soll für $x \to -\infty$ gegen Null gehen, für $x \to \infty$ wie eine Wurzel nach Unendlich, und in den Ecken sowie am Anfang des dritten Astes soll *die Steigung* einseitig nach Unendlich gehen, zum Ende des zweiten Astes aber gegen eine endliche Konstante.) An welchen Stellen wird die Ableitung nicht existieren?



2. Berechnen Sie folgende Ableitungen - sagen Sie jeweils die benötigten Regeln dazu:
   (a) $\frac{d}{dx} 2\left(\sqrt{x} + \ln(x)\right)$, $\frac{d}{da}\left(x + 3\sqrt[4]{a}\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{\ln(x)-x^2}{\ln(2)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sin(\varphi)\cos(x)\right)$
   (b) $\frac{d}{dx}\left(x^2 e^x\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1-e^x}{x^2}$, $\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{(x+\alpha)^3(x-2)^4}$
   (c) $\frac{d}{dx}e^{-3x}$, $\frac{d}{dt}e^{-\alpha t}$, $\frac{d}{dx}e^{-2x}\sin(3x+4)$, $\frac{d}{dx}2^{3x}$, $\frac{d}{dx}\log_3(4x)$, $\frac{d}{dx}\arctan(x^2+1)$, $\frac{d}{dx}\left(2x^2+1\right)^{35}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}}$, $\frac{d}{dx}\left(1+\tan^2(x)\right)$
   (d) $\frac{d}{dx}\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}\right)$
3. Was lehrt die erste Ableitung
   (a) über den Graphen von $x \mapsto \ln^2(x)$ für $x \to \infty$?
   (b) über den Graphen von $x \mapsto x\ln(x)$ für $x \to 0$?
   (c) über den Graphen von $x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ für $x \to 0$?
   (d) über den Graphen von $x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$ für $x \to \pm 1$?

Übung (13)

Hinweis: Beachten Sie für die Aufgaben 2,3,5,6, was äußere Parameter sind und was die unabhängige Variable der fraglichen Funktion ist.

1. Vereinfachen Sie durch Übergang zur Näherung 1. Ordnung folgende Rechenausdrücke für die jeweils angegebene Umgebung:
   (a) $f(x) = \ln(1+x)$ für kleine $|x|$,
   (b) $g(x) = \frac{\arctan(x-2)}{1+(x-2)^2}$ für x in einer engen Umgebung von 2.
2. Für welchen Wert von α wird $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)^2$ minimal ($n \geq 1$)?
3. Für welchen Wert von p, $0 < p < 1$, wird $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ maximal ($n \geq 1$)? Hinweis: Lösen Sie das Problem *auch* einmal so, dass Sie den Ausdruck logarithmieren. (Warum ist das in Ordnung, d.h. ändert sich dadurch das Extremwertproblem nicht?)
4. Klären Sie quantitativ die Extremwertfrage für die Funktion $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
5. Rechnen Sie als Extremwertproblem aus, welcher Punkt der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,2) + \lambda(-2,1,3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, minimalen Abstand von P hat, $\vec{x}_P = (2,2,2)$. Abstrahieren Sie das Problem für eine beliebige Gerade und einen beliebigen Punkt, und zeigen Sie damit allgemein, dass man in der Tat den minimalen Abstand durch Fällen eines Lotes zu bestimmen hat.
6. Welcher Punkt oder welche Punkte der Parabel $y = x^2$ hat bzw. haben extremalen (d.h. *lokal* minimalen oder maximalen) Abstand vom vorgegebenen Punkt $(0, b)$? Hinweis: Sie sollten eine Fallunterscheidung für b erhalten, außerdem die geometrische Anschauung hinsichtlich des zu erwartenden Resultates befragen und sie mit Ihrem Rechenresultat in Einklang bringen können. Arbeiten Sie nicht mit dem Betrag, sondern mit dessen Quadrat! (Warum ist das in Ordnung?) Verifizieren Sie wiederum, dass die Differenzvektoren zu $(0, b)$ für die extremalen Punkte der Parabel senkrecht auf der Parabel stehen.