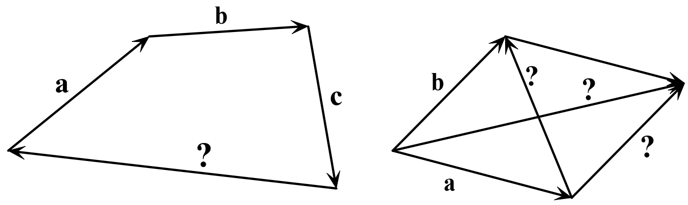
Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Lösen Sie (exakt!) die Gleichung $\sqrt{1+3x} + \sqrt{2+5x} = 16$.
2. Welche Geraden in der Ebene berühren den Kreis mit Radius 2 um den Ursprung und gehen durch den Punkt $(0,5)$?
3. Geben Sie einen Induktionsbeweis für die Tatsache, dass $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
4. Sie haben einen Würfel im dreidimensionalen Raum. Sie kennen davon den Mittelpunkt M mit $\vec{x}_M = (2,3,4)$ und einen Eckpunkt P, $\vec{x}_P = (-2,1,-3)$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung des weiteren Eckpunktes Q, der auf der Raumdiagonalen des Würfels durch M und P sitzt. Zusatzfrage (mit rein geometrischer Anschauung zu lösen): Kennt man damit bereits alle Eckpunkte des Würfels?
5. Sei $\vec{x}_P = (2,-1,3)$, $\vec{x}_Q = (3,4,-1)$. Geben Sie die Koordinatendarstellung des Punktes R auf der Strecke $\overline{PQ}$, dessen Entfernung von P doppelt so groß ist wie die von Q.
6. Drücken Sie jeweils die gefragten Vektoren durch die mit $\vec{a}, \vec{b}, (\vec{c})$ bezeichneten aus:



7. Zeigen Sie, dass die Seitenmitten eines Vierecks stets ein Parallelogramm bilden. (Nutzen Sie freie Vekoren!)
8. Stellen Sie den Vektor $(2,3)$ dar in der Form $\alpha(1,2) + \beta(3,4)$.
9. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g durch die Punkte P, Q, $\vec{x}_P = (2,1,4)$, $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$. Geben Sie auch eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu g liegt und durch den Punkt R geht, $\vec{x}_R = (3,1,1)$. Ist h von g verschieden?
10. In den Punkten P, Q, R, $\vec{x}_P = (1,2)$, $\vec{x}_Q = (-3,1)$, $\vec{x}_R = (4,3)$ sind die Massen 2, 3, 4 angebracht. Was ist der Schwerpunkt dieses Systems von Massenpunkten? Wie sieht es mit der Verallgemeinerung auf mehr Punkte und Punkte im dreidimensionalen Raum aus?
11. Geben Sie bei den folgenden Darstellungen von geometrischen Punktmengen (der Grundraum wird jeweils angegeben) jeweils an, um welche der beiden Darstellungs*formen* es sich handelt, weiter dann, welche Dimension das Gebilde hat und ob es linear (also „gerade") ist oder nicht („krumm"). Stellen Sie auch insbesondere fest, ob das jeweils beschriebene Gebilde beschränkt ist oder nicht. Finden Sie dann schließlich heraus, wie es genauer aussieht - die Koordinatendarstellungen mögen sich sämtlich auf kartesische Systeme beziehen - skizzieren Sie schließlich *grob* alle beschriebenen Punktmengen - bei f ist ein wenig zu überlegen, wie man das praktisch tun kann:
    (a) Im $\mathbb{R}^2 : \vec{x}(\lambda,\mu) = (\lambda,\mu)\,,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ 0 \leq \mu \leq \lambda^2$.
    (b) Im $\mathbb{R}^2 : \vec{x}(\lambda) = (2\lambda - 1, -3\lambda + 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$.
    (c) Im $\mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 = 1$.
    (d) Im $\mathbb{R}^2 : \lambda\,(2,3) + \mu(3,-1),\ 0 \leq \lambda,\mu \leq 1$.
    (e) Im $\mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1$.
    (f) Im $\mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 4z = 1$.
    (g) Im $\mathbb{R}^3 : (\cos(t), \sin(t), \cos(2t))\,,\ 0 \leq t \leq 2\pi$.
12. Geben Sie zu 11.f auch eine Parameterdarstellung.

Übung (5)

1. Was für eine Bewegung (deuten Sie t als Zeit) wird beschrieben mit $\vec{x}(t) = (1,2,3) + t^3(2,1,1)$, $t \in \mathbb{R}$? (Wie sieht die Bahn der Bewegung aus, wie verhalten sich (qualitativ) die Geschwindigkeiten auf der Bahn?
2. Seien $\vec{x}_P = (2,1,2)$, $\vec{x}_Q = (-1,2,1)$, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,0,0) + \lambda(-2,2,1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E, welche parallel zur Geraden g liegt und die Punkte P, Q enthält. Liegt der Punkt $(0,0,0)$ auf E? Verschieben Sie nun E parallel zu einer Ebene F, welche durch den Koordinatenursprung geht.
3. Seien $\vec{x}_P = (1,0,1)$, $\vec{x}_Q = (2,1,1)$, $\vec{x}_R = (2,1,3)$. Schneiden Sie die Ebene E, auf der P, Q, R liegen, mit der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Schneiden Sie die Ebenen E und F, welche im dreidimensionalen Raum durch folgende Gleichungen gegeben sind: $E: 2x - 3y + z = 1$, $F: -x + 2y - 3z = 1$.
5. Schneiden Sie die Ebene E der vorigen Aufgabe mit der Ebene H, welche gegeben ist durch $\vec{x}_H(\lambda,\mu) = \lambda(2,1,1) + \lambda(-2,2,-1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
6. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:
$$\begin{aligned} x - 2y + 2u - 3v + 5w &= 1 \\ 2x - 2u + v - 2w &= 0 \\ 3y - 2v + 2w &= 0 \end{aligned}$$
7. Berechnen Sie für folgende Matrizen und Vektoren jeweils „Matrix mal Vektor", so weit das definiert ist:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = (3).$$
Auf was für Vektoren kann man Sinne der Definition korrekt eine Matrix mit drei Zeilen und nur einer Spalte anwenden?

Übung (6)

1. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (x, y: Unbestimmte, a äußerer Parameter)
$$\begin{aligned}(a-1)x + 2y &= 1\\ -3x + ay &= 0\end{aligned}\quad .$$
Schreiben Sie das System auch in Matrixform, und berechnen Sie die Determinante der Matrix. Was hat sie mit Ihren Lösungen zu tun?
2. Seien A, B, C die Matrizen von Aufgabe 7 des Blattes 5. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$, $B\vec{y} = \vec{0}$, $C\vec{z} = 0$ sagen? (Unbestimmter Vektor und Nullvektor jeweils passender Länge natürlich.) Rechnen Sie sie nunmehr auch aus. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen beliebiger inhomogener Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, $B\vec{y} = \vec{c}$, $C\vec{z} = \vec{d}$ sagen?
3. Stellen Sie fest, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind: $\vec{x} = (2, 1, 1, 3)$, $\vec{y} = (-2, 3, 1, 2)$, $\vec{z} = (3, 2, 1, 3)$.
4. Geben Sie die Matrix zu für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 45 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn in der Ebene. Geben Sie nun eine Parameterdarstellung für die Parabel, die aus der Parabel $y = x^2$ durch diese Drehung entsteht. (Hinweis: Wenden Sie einfach die Drehmatrix auf den Ausdruck einer *Parameterdarstellung* für die Parabel $y = x^2$ an!)
5. Finden Sie die Matrix A mit der Eigenschaft, dass $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
6. Bilden Sie $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ - sagen Sie zuvor, wie das Resultat dimensioniert ist.
7. Finden Sie die Matrix B, so dass $B\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übung (7)

1. Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.
2. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (2, 3, -1)$. Welche Länge hat also $(4, 6, -2)$? Geben Sie einen Vektor vom Betrage 1 an in Richtung von $\vec{a}$.
3. Wie können Sie zu einer Geraden (in der Ebene) $y = mx + b$, $b \neq 0$, die Gleichung der dazu senkrechten Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) produzieren? (Verwenden Sie für die Richtungsbedingung Vektorrechnung mit Skalarprodukt.)
4. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (1, -2, 3)$ ein? Wie lautet die senkrechte Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$? Welchen Flächeninhalt hat also ein Dreieck, das $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Kantenvektoren besitzt?
5. Welchen Winkel bildet die Gerade g, $\vec{x}(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$ Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).
6. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{x} = (3, 2, -3)$ in eine vektorielle Komponente parallel zu $\vec{a} = (1, 2, -3)$ und eine senkrecht zu $\vec{b} = (2, 1, 1)$.
7. Schauen Sie sich die Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = (3, 2, -2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$, $(4, -3, 3)$ an. Lösen Sie nun die Gleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, indem Sie an die Gleichung geeignete Vektoren skalar anmultiplizieren.
8. Wie kam das Skalarprodukt im Rahmen der Operation `Matrix mal Vektor" vor?
9. Von einer Ebene E wissen Sie: Der Punkt P liegt auf ihr, $\vec{x}_P = (2, 1, 1)$, und der Vektor $(2, 3, 1)$ steht senkrecht auf ihr. Geben Sie eine Gleichungsdarstellung für E.
10. Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines Parallelogramms genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn das Parallelogramm eine Raute ist (d.h. alle Seiten gleich lang sind).