Übung (2)

1. (Eine kleine Übung zum Bruchrechnen:)
   (a) Vereinfachen Sie (warum steht hier die Klammer im Nenner?) den Ausdruck $\frac{\frac{a}{b}-2}{\left(\frac{3}{a+2b}\right)}$.
   (b) Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{x-a}+\frac{2}{3(x-b)}=\frac{1}{x}$. (Unbestimmte: x - welchen systematischen Fehler könnte jemand zu begehen geneigt sein?)
   (c) Rechnen Sie aus, indem Sie *zunächst* so viel wie möglich ausklammern und auch am Ende so viel wie möglich ausklammern:
   $$\frac{5a-13b}{81a^3b^3}-\frac{2}{27a^2b^2}+\frac{1}{54a^2b^3}.$$
   (d) Bringen Sie die Wurzel aus dem Nenner, indem Sie geeignet erweitern $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Denken Sie an Erweitern und an die binomische Formel $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
2. Berechnen Sie $\binom{20}{15}$, indem Sie den definierenden Bruch $\frac{20!}{15!\cdot 5!}$ so weit wie möglich kürzen. Schreiben Sie den nach erstem Kürzen durch 15! entstehenden Bruch einmal konkret aus, schreiben Sie ihn dann auch mittels des Symbols $[a]_k := a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)$ für $k\in\mathbb{N}$, $k>0$. (Sehen Sie: Diese Definition enthält Pünktchen - können Sie mit dem Induktionsanfang $[a]_0 := 1$ eine rekursive Definition dafür angeben?) Schreiben Sie nun den allgemeinen Ausdruck $\binom{n}{k}$ ebenfalls in gekürzter Form *auf zwei Weisen* mittels des Symbols $[a]_b$. Kürzen Sie nunmehr den Bruch
   $$\frac{\binom{20}{10}\cdot\binom{30}{10}}{\binom{50}{20}}$$
   so weit wie *auf den ersten Blick* möglich. Verwenden Sie dabei auch die Schreibweise $[a]_k$.
3. Schreiben Sie folgende Summe mit großem Summenzeichen: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{24}+\frac{1}{26}$. (Die Pünktchen deuten an: „immer so weiter".) Gehen Sie dabei über folgende Schritte: Zunächst schreiben Sie das allgemeine Folgenglied auf (Sie benötigen einen Laufindex, den Sie frei wählen können!), anschließend überlegen Sie den benötigten Indexbereich. Dann können Sie die Summe aufschreiben. Tun Sie dasselbe für $\binom{n}{0}p^0(1-p)^{n-0}+\binom{n}{1}p^1(1-p)^{n-1}+\ldots+\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $(1<k\leq n)$. (Überlegen Sie, welche äußeren Parameter hier vorgegeben sind - lassen Sie die nicht mit Ihrem Laufindex kollidieren!) Wem ist eine inhaltliche Interpretation dieser Summe bekannt?
4. Schreiben Sie die Summe $\sum_{i=0}^{3}x^i$ aus. Berechnen Sie $(1-x)\sum_{i=0}^{3}x^i$. Erkennen Sie nun, was bei $(1-x)\sum_{i=0}^{n}x^i$ für beliebiges $n\in\mathbb{N}$ herauskommt? Stimmt Ihre Formel auch für $n=0$?
5. Jemand folgert für $a,b\in\mathbb{R}$ aus $a<b$, dass $a^2<b^2$. Was sagen Sie dazu? Geben Sie einen passenden Gültigkeitsbereich für die Folgerung.
6. Welche (allgemeingültigen!) Ungleichungen können Sie für folgende Terme $(a,b\in\mathbb{R})$ aufstellen? $|a|+|b|$, $|a+b|$, $\max(a,b)$, $\max(|a|,|b|)$? Geben Sie auch verbale oder rechnerische Begründungen für Ihre Ungleichungen. Nutzen Sie dazu die Definition vom Absolutbetrag reeller Zahlen (sie lautet: $|a| := a$ für $a\geq 0$, $|a| := -a$ für $a<0$).
7. Seien $a<b$ reelle Zahlen. Geben Sie folgende Folge von Zahlen zunächst in Pünktchen-Schreibweise, dann in einer Schreibweise ohne Pünktchen (mit allgemeinem Folgenglied) an: Es handelt sich um 100 Zahlen im Intervall $]a,b[$ (Grenzen also ausgeschlossen), die untereinander alle denselben Abstand d haben, während die kleinste von a nur den Abstand $d/2$ und die letzte von b ebenfalls den Abstand $d/2$ hat. (Sagen Sie vorab, was für Buchstaben im Ausdruck des allgemeinen Folgengliedes auftreten sollten.)
8. Überlegen Sie, wie nach doppelter Anwendung der allgemeinen binomischen Formel eine Formel für $(a_1+a_2+a_3)^5$ aussehen müsste. Kontrollieren Sie Ihr Resultat, und verallgemeinern Sie es auf den Fall $(a_1+a_2+a_3)^n$ und dann auch auf den Fall $\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^n$.

Übung (3)

1. Sie haben reelle Zahlen $x_1, ..., x_n$, die nicht alle gleich sind. Geben Sie den Rechenausdruck für eine lineare Transformation dieser Werte an, so dass nur Werte in $[0, 1]$ herauskommen und die Grenzen 0,1 auch als Werte bei den $x_1, ..., x_n$ wirklich auftreten.
2. Betrachten Sie alle Funktionen der Form $f(x) = \frac{ax}{bx+c}$. Zeigen Sie zunächst, dass man diese Schar von Funktionen auch mit nur zwei Parametern parametrisieren kann. Stellen Sie dann diese Parameter so ein, dass $f(x)$ gegen 10 geht für $x \to \infty$ und $f(1) = 2$ gilt. Kann man an beliebiger Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ den Wert vorschreiben? Führen Sie einen weiteren Parameter ein, dass das möglich wird.
3. Beschreiben Sie *alle* gleichschenkligen Dreiecke, deren Winkelhalbierende zwischen zwei gleich langen Seiten die Länge $h > 0$ hat.
4. Beschreiben Sie alle Parabeln der Form $Ax^2 + Bx + C$, $A \neq 0$, die durch den Punkt $(1, 1)$ gehen.
5. Folgern Sie aus der allgemeinen binomischen Formel die Allgemeingültigkeit der Ungleichung $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ für $\alpha \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass für jede natürliche Zahl k der Wert von $\left(1 + 10^{-k}\right)^n$ mit wachsendem n über alle Schranken wächst. (Nutzen Sie dafür das Axiom, dass es für jede reelle Zahl x eine natürliche Zahl n gibt, so dass $n > x$.)
6. Für Mengen A, B ist der Durchschnitt definiert durch $A \cap B := \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$.
   (a) Was kommt bei $A \cap B$ heraus für den Fall $A \subseteq B$ (also A Teilmenge von B, d.h. aus $x \in A$ folgt stets $x \in B$)?
   (b) Verstehen Sie nun $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ für Mengen nach dem Muster des großen Summenzeichens: Durchführung der Operation mit allen Objekten, die mit der Indexmenge beschrieben sind. Wie lautet dasselbe in Pünktchenschreibweise? Sei nun N_k definiert als Menge derjenigen natürlichen Zahlen, die durch k teilbar sind, für $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Was ist dann $\bigcap\limits_{k=2}^{10} N_k$ für eine Menge? (Sagen Sie das einmal genau in Worten im Sinne der unmittelbaren Anweisung, versuchen Sie jedoch auch, eine möglichst einfache Beschreibung des Resultats zu liefern, also gewissermaßen den Durchschnitt zu berechnen (so nennt man diesen Vorgang denn auch üblicherweise).
7. Für welche Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt $2x^2 - 3x - 4 > 0$? (Nutzen Sie dazu die Lösung der zugehörigen Gleichung und anschließend die Gestalt der Parabel $y = 2x^2 - 3x - 4$.) Beschreiben Sie die Lösungsmenge in Worten, dann gelingt es auch in Mengenschreibweise der Form: $\{x \in \mathbb{R} | \text{ (Bedingung)}\}$.
8. Benutzen Sie die allgemeine binomische Formel $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$: Schreiben Sie damit zunächst $(a + b)^{n+1}$ auf, dann $(a + b)(a + b)^n$, und leiten Sie durch Koeffizientenvergleich (bei jedem Glied der Form $a^k b^{n+1-k}$ muss in beiden Ausdrücken derselbe Vorfaktor stehen!) die Formel $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ her für $0 < k < n + 1$. Geben Sie auch einen Induktionsbeweis für die Formel - das ist tatsächlich ganz einfach! Machen Sie Ihren Induktionsanfang mit $n = 1$.

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\overrightarrow{x}_P = (1, -2, -3)$ mit zugehörigem vollem Quader ein.
2. Sei ein kartesisches System K für die Ebene gegeben.
   (a) Skizzieren Sie die Menge aller Punkte P mit der Eigenschaft: $\max(\left|x_P^K\right|, \left|y_P^K\right|) \leq 1$.
   (b) Ebenso für die Bedingung $\left|x_P^K\right| + \left|y_P^K\right| \leq 1$.
   (c) Ebenso (nutzen Sie eine Skizze der zugehörigen Geraden!): Die Menge aller Punkte, deren Koordinaten folgendes Bedingungssystem erfüllen:
   $$\begin{aligned} y &\leq 2x+3 \\ y &\leq -x-1 \\ y &\geq \frac{1}{2}x-2 \end{aligned}$$
   Welche komplette praktische Beschreibung können Sie für diese Punktmenge angeben?
3. (Genaue verbale Beschreibung und Skizze!) Welche Punktmenge im dreidimensionalen Raum (kartesisches System vorausgesetzt) erfüllt mit den jeweiligen Koordinaten das Bedingungssystem
   $$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ 0 &\leq z \leq 5? \end{aligned}$$
   Geben Sie für diese Punktmenge auch eine Parameterform. Können Sie auch sagen, was zu erwarten wäre bei nicht kartesischem System? Was ändert sich, wenn man die erste Bedingung durch $x^2+y^2 \leq 1$ ersetzt?
4. Geben Sie für die Lösungsmenge von $z = x+y$ *und* $y = 3x-3z$ eine Parameterdarstellung. (Hinweis: Drücken Sie y, z durch x aus.
5. Die Gerade g in der Ebene gehe durch die Punkte P und Q mit den kartesischen Koordinatendarstellungen $\vec{x}_P^K = (2, 1)$, $\vec{x}_Q^K = (2, 3)$. Geben Sie die Gerade in Gleichungsform und in Parameterform an - letztere in Koordinatenform.
6. Geben Sie den Kreis in der Ebene mit Radius 5 und Mittelpunkt $\vec{x}_M^K = (-2, 3)$ (K kartesisch!) in Gleichungsform und in Parameterform an. Warum lautet die charakteristische Operation der Umformung von der betreffenden Darstellung eines Kreises um den Ursprung einmal „Minus”, einmal „Plus”?
7. Sei eine Bewegung in der Ebene so beschrieben, dass der Ort zur Zeit t lautet: $\vec{x}(t) = (t, t^2)$, in kartesischer Koordinatendarstellung. Auf was für einer Bahn verläuft die Bewegung? Wie können Sie eine dazu parallel verlaufende Bewegung stets bequem beschreiben? Wie können Sie eine Bewegung auf derselben Bahn beschreiben, die nur zeitlich so verläuft, dass zur Zeit $t = 1$ der Ort $(0, 0)$ erreicht wird. Wie können Sie diese Bewegung zusätzlich schneller / langsamer ablaufen lassen?
8. Beschreiben Sie eine gleichförmige Bewegung, die zunächst geradlinig von $(0, 0)$ zu $(1, 1)$ und dann geradlinig von $(1, 1)$ zu $(2, 0)$ führt. Hinweis: Sie benötigen eine Definition durch Fallunterscheidung, wie sie eine solche der Form nach beim Absolutbetrag gesehen haben, hier also: $\vec{x}(t) = ...Ausdruck_1...$ für $t \in Intervall_1$, $\vec{x}(t) = ...Ausdruck_2...$ für $t \in Intervall_2$. Wie würde sich dergleichen in einem entsprechenden Computer-Zeichenprogramm äußern?
9. (a) Berechnen Sie zu $\overrightarrow{x} = (1, 2, -3)$, $\overrightarrow{y} = (2, 3, 1) : \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}/3$.
   (b) Bringen Sie folgenden Ausdruck auf Endform: $\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{2b}\right) + (\alpha+\beta)\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right)$.
   (c) Bringen Sie den Ausdruck $(2\lambda+1, -3, -4\lambda-1)$ auf die Form: „konstanter Vektor plus λ mal weiterer konstanter Vektor”. Was hat man davon?