Übung (1)

1. Multiplizieren Sie aus: $(a+b)(c-d)$.
2. Klammern Sie aus dem Ausdruck $a^2b^3 - 5a^2b^5$ möglichst viel aus, und geben Sie dann in einfachen Worten die genaue Bedingung dafür an, dass Ausdruck den Wert Null erhält.
3. Geben Sie in Parameterform (mittels eines freien Parameters) die Menge aller reellen Zahlenpaare (x, y), welche die Gleichung $2x - 3y = 1$ lösen. Welche Lösung der Form $(4, y)$ gibt es, welche der Form $(x, 4)$? Wie lautet die zugehörige Achsenabschnittsform, und wie sehen folglich die Schnittpunkte der zugehörigen Geraden mit den Achsen aus?
4. Sei eine Gerade g gegeben durch $y = -\frac{3}{4}x + 4$. Zeichnen Sie die Gerade unter Verwendung eines Punktes und eines Steigungsdreiecks. Geben Sie in derselben Form diejenige Gerade an, welche dieselbe Steigung hat wie g, bei der jedoch zum $x-$ Wert -3 der $y-$ Wert 4 gehört.
5. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung
$$\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
6. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung $x^2 - ax + 1 = 0$ (x Unbekannte, a äußerer Parameter), d.h. geben Sie für *jeden* Wert von a die Lösungsmenge an. Wie sieht dagegen die Menge aller Paare (a, x) aus, welche die Gleichung lösen (diesmal also mit a, x als zwei Unbestimmten!)?
7. Geben Sie zur Parabel $y = 3x^2 - 5x - 4$ die Scheitelpunktsform. Welche Koordinaten hat also der Scheitel? Geben Sie nunmehr lineare Substitutionen bzw. Transformationen $u = \alpha x + \beta$ und $v = \gamma y + \delta$ der unabhängigen und der abhängigen Variablen derart an, dass die Gleichung $y = 3x^2 - 5x - 4$ die einfache Standardform $v = u^2$ annimmt. (Hinweis: Das Benötigte können Sie von der Scheitelpunktsform ablesen. Achten Sie darauf, dass Sie alle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ korrekt angeben. Gibt es mehr als eine Lösung der Aufgabe?)
8. Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen $x, y \geq 0$ stets gilt: $\frac{1}{2}(x+y) \geq \sqrt{xy}$. (Hinweis: Dazu ist nur durch Rechnung die Ungleichung gleichwertig umzuformen!) Welche inhaltliche Bedeutung haben beide Bildungen? *Formulieren* Sie eine größtmögliche Verallgemeinerung dieser Aussage (die übrigens auch gilt!).
9. Lösen Sie die Gleichung $\left(\frac{1}{2}x - 2\right)^{3/2} = 5$.
10. Sei $f(x) = \sqrt{3+x}$. Was ist $f(f(f(x)))$ - schreiben Sie das aus. Für welche Zahl x gilt $f(x) = x$? Sei nun $x_0 \geq -3$ eine feste Zahl. Dann sei $x_{n+1} = f(x_n)$ rekursiv definiert. Überlegen Sie *intuitiv,* ob die Folge $(x_n)_n$ einen Grenzwert haben sollte, und welchen. Man beachte: Jeder Wert $x_0 \geq -3$ könnte Startwert sein, was ändert sich jedoch nicht? Schreiben Sie ein Computerprogramm, das nach Eingabe von x_0 und n ausgibt: $f(x_n)$. Wie könnte man das Grenzwertverhalten für beliebige Startwerte x_0 nun mit dem Computer experimentell untersuchen?
11. Schreiben Sie die Summe $\sum_{i=0}^{3} x^i$ aus. Berechnen Sie $(1-x)\sum_{i=0}^{3} x^i$. Erkennen Sie nun, was bei $(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ herauskommt? Stimmt Ihre Formel auch für $n = 0$?