Übung (9)

(1) Behandeln Sie folgendes Problem allgemein, überlegen Sie für beide Fragen, was vernünftigerweise gegeben sein sollte: Stellen Sie sich die Ebene E als undurchsichtig vor. Kann man dann von P aus Q sehen? (Finden Sie eine Lösung des Problems mittels einer Parameterdarstellung E, dann aber auch mittels einer Normalenform für E.)

(2) Beschreiben Sie eine Bewegung in der Zeit, welche ausgehend vom Punkt $(5, 0, 0)$ zur Zeit $t = 0$ schraubenförmig um die $z-$ Achse verläuft, in Richtung der positiven $z-$ Achse in immer enger werdenden Windungen.

(3) Rechnen Sie zu $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$, $\vec{c} = (1, 2, -2)$ aus: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $3\vec{c}\left(2\vec{b} \times (-5)\vec{a}\right)$, Determinante der Matrix mit den Zeilenvektoren (in dieser Reihenfolge!): $2\vec{b}, 3\vec{c}, -5\vec{a}$ - tun Sie das möglichst praktisch, deuten Sie die Resultate geometrisch.

(4) Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} + 3\vec{y}) \times (4\vec{y} - 5\vec{x})$.

(5) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(\left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \left(5\vec{c} - 3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right)$.

(6) Geben Sie ein konkretes Beispiel dafür, dass das Vektorprodukt nicht assoziativ ist.

(7) Seien zwei windschiefe Geraden ('windschief': nicht parallel und ohne Schnittpunkt) gegeben durch Parameterdarstellungen $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\vec{x}_h(\beta) = \vec{x}_Q + \beta\vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des Abstandes zwischen g und h. Nutzen Sie dabei folgende Idee: Der Abstand wird richtig gemessen durch die Länge eines Vektors, der senkrecht zu beiden Geraden steht (also ein Vielfaches des Vektorproduktes ist!) und genau eingespannt werden kann zwischen einen Punkt auf der einen Geraden und einen Punkt auf der andern Geraden.

(8) Folgern Sie aus der Schwarzschen Ungleichung $\left|\vec{a}\vec{b}\right| \leq |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|$ die Dreiecksungleichung $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. Hinweis: Zeigen Sie gleichwertig die entsprechende Ungleichung für die quadrierten Seiten der Dreiecksungleichung.

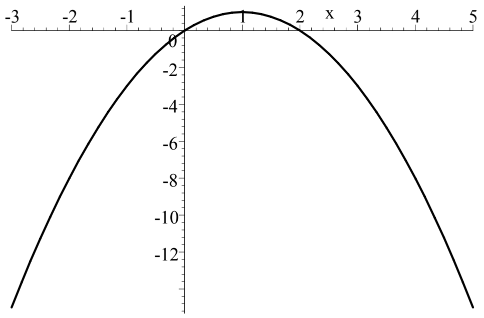
Übung (10)

(1) Geben Sie jeweils den maximalen reellen Definitionsbereich an, stellen Sie vorab ausdrücklich etwa vorhandene Standard-Symmetrien fest, und skizzieren Sie jeweils grob den Graphen zu den Funktionen mit folgenden Rechenausdrücken:

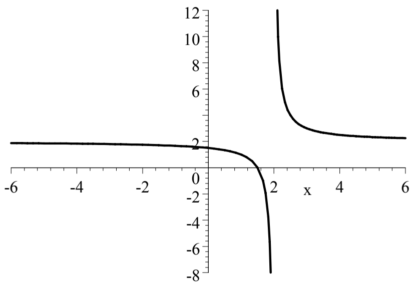
$$\frac{x}{x+1},\ \frac{x}{x^2-1},\ \frac{x-x^3}{1+x^4}.$$

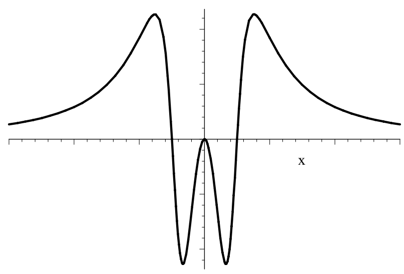
Nutzen Sie insbesondere die Leitfragen nach Vorzeichen und Dominanz (Verhalten für große $|x|$ und die Frage nach Polen gehören dazu!). Zum ersten Beispiel: Von welcher bekannten Funktion ist das eine leichte Veränderung?

(2) Produzieren Sie Rechenausdrücke für Funktionen, welche folgende Graphen *qualitativ* realisieren, allerdings sollen im ersten Beispiel die Lage der Nullstellen, im zweiten Beispiel Lage des Pols und der horizontalen Aymptote auch *quantitativ* korrekt realisiert werden. Hinweis: Gewinnen Sie die ersten beiden Funktionen als leichte Veränderungen von einfachen wohlbekannten Funktionen, die letzte als möglichst einfache gebrochen rationale Funktion.



(a)





(b) (c)

(3) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen mit folgenden Rechenausdrücken (maximaler reeller Definitionsbereich jeweils?), indem Sie lediglich auf Nullstellen / Pole / Vorzeichen / Dominanz achten:

$$f(x) = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)\,,\ g(x) = \frac{1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$$

(Also *nicht*: Maxima, Minima, Ableitung,...) Zeigen Sie, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Punkt $(2,0)$ liegt.

(4) Rechnen Sie mittels des Additionstheorems exakt $\sin(\pi/12)$ aus. Hinweis: Drücken Sie dazu $1/12$ geschickt als Summe aus - denken Sie daran, dass Sie $\sin(\pi/3), \sin(\pi/4)$ exakt kennen!

(5) Schreiben Sie mit Additionstheorem Gleichungen für $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$ hin. Addieren Sie diese Gleichungen, und gewinnen Sie eine (später nützliche!) Umformung für $\cos(x)\cos(y)$.

(6) Geben Sie alle Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 3\sin(5x - 1)$.

(7) Geben Sie *alle* Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0.7$ *exakt* an. Hinweis: Sie benötigen dabei den Ausdruck $\arcsin(0.7)$ - den kann man nicht exakt vereinfachen!

(8) Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^2)$, $e^{\sin(x)}$, $\sqrt{|x|}\sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien (einschließlich Periodizitäten) ausdrücklich fest.

Übung (11)

(1) Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von f liegt spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = a$.'

(2) Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Geben Sie eine Parameterdarstellung für den Graphen von f. Nunmehr parametrisieren Sie auch die Punktmenge, die man erhält, wenn man den Graphen von f mit dem Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. parallel verschiebt. Geben Sie einen (möglichst einfachen) Ausdruck für die Funktion an, deren Graph diese neue Punktmenge ist. Führen Sie dasselbe Programm durch mit der geometrischen Operation: 'Stauchen des Graphen von f längs der $x-$ Achse (mit Festlassen der $y-$ Achse)' mit Faktor $\alpha > 0$.

(3) Sei I ein Intervall, und seien f auf I monoton steigend, g auf $f(I)$ monoton fallend. Was können Sie über das Verhalten von $g \circ f$ auf I sagen?

(4) Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

(5) Was bedeutet die Formel $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ für den geometrischen Zusammenhang des Graphen zu $\ln(ax)$ mit dem Graphen zu $\ln(x)$? Welche *andere* geometrische Operation mit dem Graphen zu $\ln(x)$ liefert *ebenfalls* den Graphen zu $\ln(ax)$?

(6) Lösen Sie (exakt natürlich!) die Gleichungen $|\arctan(x)| = 1$, $3^{2x+1} = 10$ und $\log_5(x) = 5$.

(7) Wenn eine gedämpfte Schwingung die Form $e^{-5t}\sin(3t)$ hat - in welchen Zeitabständen halbiert sich dann die Amplitude?

(8) Wenn sich bei exponentiellem Zerfall (etwa radioaktiv) eine Halbierung alle 150 Jahre ergibt - nach welcher Zeit ist das ursprüngliche Material auf 1 Prozent reduziert?

(9) Konstruieren Sie durch Überlagerung eine grobe Skizze zur Funktion $g(x) = \sin(x) + \sin(2x)$.

Übung (12)

(1) Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an (vergessen Sie auch nicht, nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen):
   (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   (b) $g(x) = \sqrt{-2x-3}$
   (c) $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$
   (d) $l(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

(2) Schreiben Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = 2\,(3x-5)^4$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.

(3) Berechnen Sie folgende Ableitungen:
   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x + 5\sqrt[4]{x^3} + x^e + \ln(x) - 3\sin(x)\right)$
   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}(-2x+1)^5$
   (c) $\frac{d}{dx}(x^a \tan(x))$, $a \in \mathbb{R}$. (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)
   (d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?
   (e) $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{\sin(1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.
   (f) $\frac{d}{dx}\left(1-2x^2\right)^2$ (Kettenregel!)
   (g) $\frac{d}{dx}\sin^3(x)$ (was ist beim Graphen qualitativ anders als bei sin, und wie äußert sich das in der Ableitung?)
   (h) $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x^2 + 1}$, α reellwertige Konstante (Wohin geht die Steigung der Funktion $x \mapsto \sqrt{\alpha x^2 + 1}$ bei $\alpha < 0$ für x gegen die Ränder des Definitionsbereiches?)
   (i) $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$
   (j) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x}{(x+\alpha)^2(x-2)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)
   (k) $\frac{d}{dx}\log_3(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ $(a > 0)$.

(4) Zeigen Sie mittels der Ableitung, dass die Funktion $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist. Geben Sie auch einen Rechenausdruck für die Umkehrfunktion an.

(5) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ bei dem Ausdruck $\ln\left(1 + \frac{x}{1+x^2}\right)$. Welches Näherungsresultat erhalten Sie speziell für $x = 0.1$? In welcher Größenordnung liegt also der absolute Fehler in diesem Falle?

Aufgaben zum Wochenende (3)

Erster Block: Wiederholungen zur Vektorrechnung

(1) Schreiben Sie für die Ebene, welche durch $\vec{x}_E(\alpha, \beta) = (1,2,2) + \alpha\,(2,-1,2) + \beta\,(2,3,-1)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, gegeben ist, eine Normalenform auf. Finden Sie einen Vektor parallel zu E, welcher senkrecht zum ersten Richtungsvektor $(2,-1,2)$ steht. Hinweis: Bilden Sie dazu ein Vektorprodukt. Bilden Sie damit ein kartesisches System für E, und geben Sie eine Parameterdarstellung für den Kreis um den Aufpunkt von E, welcher auf E liegt und Radius 5 hat.

(2) Schneiden Sie die Ebene F, welche durch die Gleichung $2x - y + z = 1$ gegeben ist, mit der Parabel $\vec{x}(t) = (1,1,1) + t\,(1,-2,1) + t^2\,(2,-1,-1)\,,\ t \in \mathbb{R}$. Zusatzfrage: Beschreiben Sie die Ebene, in welcher die Parabel liegt.

(3) (Kartesisches System!) In der $xy-$ Ebene liegt achsenparallel ein Quadrat der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, mit dem Mittelpunkt im Ursprung.
   (a) Wie muss $\vec{x}_S = (0,0,s)$ gewählt werden, damit S zusammen mit den Quadratpunkten eine vierseitige Pyramide mit lauter gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen bildet?
   (b) Welchen Winkel bildet jede der aufsteigenden Kanten mit der $xy-$ Ebene?
   (c) Welchen Winkel bildet jede dreieckige Seitenfläche der Pyramide mit der Grundfläche?
   (d) Welchen Winkel bilden die dreieckigen Seitenflächen untereinander?
   (e) Betrachten Sie die Pyramidenseitenfläche, welche die beiden Punkte mit positiver $x-$ Koordinate enthält. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch den Mittelpunkt dieser Seitenfläche geht und senkrecht diese Seitenfläche durchstößt.
   (f) Was ist der Schwerpunkt der Pyramide bei homogener Massenverteilung?

(4) Zerlegen Sie den Vektor $(1,2,2)$ in eine Summe von zwei Vektoren, von denen einer parallel zu $(1,1,1)$ und einer senkrecht zu $(1,1,1)$ steht.

Zweiter Block: Zu den Funktionen

(1) Geben Sie die *exakten* Sinus- und Cosinus- Werte zum Winkel $-7\pi/6$.

(2) Wie lauten die Abszissenwerte der Minima von $-2\sin(4x-3)+5$?

(3) Lösen Sie die Gleichung $2^{\sqrt{x}} = 5$. Wie sieht der Graph von $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ aus, im maximalen reellen Definitionsbereich? Skizzieren Sie grob den Graphen. Berechnen Sie auch die erste Ableitung - welche Informationen liefert sie zum Steigungsverhalten von f und zum Verhalten in der Nähe von $x = 0$? Warum muss es mindestens einen Wendepunkt geben? Rechnen Sie aus, dass es nur einen gibt und wo er liegt.

(4) Eine Funktion f habe die Eigenschaft, dass $f(0) = 0$ und $f(x) \to m$ für $x \to \infty$, $(m > 0)$. f steige derart gegen den Wert m, dass sich der Abstand zwischen m und $f(x)$ halbiert, wenn x um den Wert 10 anwächst. Geben Sie einen Rechenausdruck für f über leichte Veränderung der Exponentialfunktion.

(5) Wie lautet die Näherung 1. Ordnung für $\sin(x)$ für eine kleine Umgebung von $x_0 = \pi/4$?

(6) Diskutieren Sie die Funktionen $g(x) = \frac{x^3+x}{1-x^2}$, $h(x) = \frac{x^3}{1+x^2}$ (ohne die Ableitung heranzuziehen). Grobe Skizze der Graphen! Überlegen Sie aber dann auch, was die erste Ableitung Ihnen noch mehr bringen würde in diesen Fällen.

(7) Wie sehen die Graphen aus zu $e^{(x/a)^b}$, $a > 0$, $b > 1$, im gemeinsamen Definitionsbereich $[0, \infty[$? Bringen Sie insbesondere heraus, was Anwachsen von a und b bewirken. Zeichnen Sie die Gestalt des Graphen, die grob qualitativ immer gleich ist.

(8) Bilden Sie die Näherung 1. Ordnung von $f(x) = \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \leq 1$, äußerer Parameter, Näherung natürlich um $x_0 = 0$. Da wir den Wert von x fixiert denken können und uns für große Werte von n nur interessieren, können wir $|x/n|$ als beliebig klein voraussetzen.) Schließen Sie daraus auf $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)$. Was ist also $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$? Wie können Sie Ihr Resultat mit dem Taschenrechner testen?