Übung (13)

(1) Bilden Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{xe^x}{1-x\ln x}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{2+\cos^2(x)}, \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}, \; \frac{d}{dx}\arctan(x^3-1).$$

(2) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für den Ausdruck $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ für $v^2 << c^2$. (Welche Funktion ist zu betrachten?) Welche Stelle hinter dem Komma wird bei der Näherung erst falsch, wenn $v = c/100$?

(3) Es ist definiert: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Verwenden Sie die Regel zur Ableitungen von Umkehrfunktionen, um die Ableitung von $\sinh^{-1} = \operatorname{arcsinh}(x)$ zu berechnen. Verifizieren und nutzen Sie dazu, dass für $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gilt: $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$. Finden Sie dasselbe Resultat auch heraus, indem Sie einen Ausdruck für arcsinh ausrechnen und diesen ableiten.

(4) Warum ist das Problem des Auftretens von Extrema für eine Funktion wie $f(x) = \sqrt{|x|}$ (Definitionsbereich $\mathbb{R}$) nicht mittels der Ableitung zu lösen? Hat die Funktion ein Minimum / absolutes Minimum? Hat die Funktion $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$, ein absolutes Maximum? Und was ist mit der Ableitung?

(5) Wo hat der Graph zu $f(x) = e^{-x^2}$ seine Wendepunkte? *Folgern* Sie daraus, wo die Wendepunkte zu $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ liegen - rechnen Sie dazu nicht erneut aus, sondern fassen Sie $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ nach geeigneter Umformung als lineare Transformation von e^{-x^2} auf.

(6) Betrachten Sie alle Funktionen $f_{a,b,c}(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Stellen Sie genaue Bedingungen für das Vorkommen von Extrema / Sätteln auf. Teilen Sie diese Funktionen damit in drei Klassen ein. Wie verhält es sich mit der Existenz von Wendepunkten?

(7) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabel, indem Sie die Bedingung $\vec{x}'(t)\vec{x}''(t) = 0$ nutzen: $\vec{x}(t) = (2, 1, 1) - t\,(3, 2, -2) + \frac{1}{2}t^2\,(2, 1, -3)\,,\ t \in \mathbb{R}$.

(8) Geben Sie einen Rechenausdruck $f(x)$ für eine Funktion, deren Graph symmetrisch zur $y-$ Achse liegt und eine Schwingung darstellt mit schnell mit anwachsendem $|x|$ gegen Null abfallender Amplitude und zusätzlich mit einer Steigerung der Frequenz bei anwachsendem $|x|$.

Übung (14)

(1) Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}(t) = \sin(2t) \cdot (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$. Wie sieht die Bahn aus? Hinweis: Was ergibt sich ohne den Faktor? Was bewirkt der Faktor $\sin(2t)$? Für welche Werte von t gilt $\vec{x}(t) = (0,0)$? Geben Sie für diese Zeitpunkte die Geschwindigkeitsvektoren an. Bei welchen Werten von t wird der Betrag von $\vec{x}(t)$ maximal? (Arbeiten Sie mit dem Betragsquadrat, das sollten Sie sehr einfach darstellen, bevor Sie ableiten.)

(2) Welcher Zylinder (gemeint sind nur gerade Kreiszylinder) mit Radius r und Höhe h hat bei festem Oberflächeninhalt O maximales Volumen? Hinweis: Formulieren Sie die Aufgabe als Extremwertaufgabe für eine einfache Funktion; denken Sie daran, dass O eine Konstante ist und somit über die Oberflächeninhaltsformel $O = 2r^2\pi + 2rh$ eine Kopplung der zunächst unabhängigen Variablen r, h besteht. Geben Sie das im Sinne maximalen Volumens bei gegebener Oberfläche optimale Verhältnis h/r an.

(3) Modifizieren Sie die Parabel $y = 1 - x^2$ derart, dass an denselben Stellen die $x-$ Achse durchstoßen wird, jedoch mit einem Winkel von 30 Grad. Hinweis: Bringen Sie einen geeigneten Faktor an.

(4) Geben Sie zum Skalarfeld $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ den Gradienten an der Stelle $(-1,2)$ an. Beschreiben Sie in Gleichungsform und auch in Parameterform die Normale zur Niveaukurve, welche durch $(-1,2)$ geht. Skizzieren Sie auch diese Niveaukurve. Was für eine Kurve ist das genau? Formulieren Sie ihre Gleichung so um, dass das offenbar wird.

(5) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Begründen Sie mittels der de L'Hospitalschen Regel, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$.

(6) Warum ist für die Frage nach $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{\arctan(1/x)}$ die de L'Hospitalsche Regel *nicht* anwendbar? Rechnen Sie nach, dass fälschliche Anwendung tatsächlich ein falsches Resultat ergäbe - welches genau? -, und nennen Sie das richtige Ergebnis.

(7) Wenden Sie den Satz vom endlichen Zuwachs an, um zu zeigen, dass $\sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ für $x \geq 0$. Welche Ungleichung ergibt sich daraus für $x < 0$?

Übung (15)

(1) Geben Sie eine obere Schranke für $\int_{-2}^{2} \arctan^2(x)dx$ anhand der Flächendeutung.

(2) Welchen Wert muss $\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{1+x^6}dx$ haben (wiederum anhand der unmittelbaren geometrischen Interpretation)?

(3) Warum muss der Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{e^{-2x^2}+x^{11}}{1+x^4+2x^8}dx$ positiv sein? (Versuchen Sie nicht etwa eine exakte Ausrechnung des Integrals - das geht nicht.)

(4) Stellen Sie mittels Integration fest, dass in beliebigem Intervall voller Periodendauer der Mittelwert von $a\cos(\omega t+\varphi)+b$ gleich b ist.

(5) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{x}$ im Bereich $[1;3]$?

(6) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int_{-2}^{2} \left(1+x^2\right) dx$, $\int_0^{\pi/2} \left(e^x - 3\cos(x) - \sqrt{x}\right) dx$.

(7) Berechnen Sie $\int_0^1 \sin(10t)\, dt$, $\int \frac{2}{x+1}dx$, $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$, $\int (2x-1)^{90}\, dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$.

(8) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int x\sin(x)dx$, $\int x\sqrt{1-x^2}dx$, $\int \frac{1}{1+x^2}\ln(1+\arctan(x))\, dx$. Benutzen Sie für letzteres Integral, dass Sie bereits wissen: $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x$.

(9) Eine Bewegung verlaufe mit der Beschleunigung zur Zeit t : $\vec{b}(t) = t\,(1,1,0)$. Zur Zeit $t=0$ befinde man sich am Ort $(1,1,1)$ und habe die Geschwindigkeit $(0,0,1)$. Stellen Sie die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion $t \mapsto \vec{v}(t)$ und die zugehörige 'Weg-Zeit-Funktion' $t \mapsto \vec{s}(t)$ auf.

Übung (16)

(1) Berechnen Sie $\int dx \ln\left(x^3\right)$, $\int \frac{dx}{2+x^2}$.

(2) Berechnen Sie $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$, $\int \frac{dx}{(1+e^x)(1-e^x)}$, $\int dx \frac{1}{x(x^2+1)}$.

(3) Berechnen Sie $\int xe^{-2x} dx$.

(4) Berechnen Sie $\int \cos^2(x) dx$ mit geschickter Umformung von $\cos^2 x$ in eine Summe mittels des entsprechenden Additionstheorems. Sehen Sie ein, dass partielle Integration möglich wäre, aber viel unpraktischer.

(5) Berechnen Sie $\int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx$. Hinweis: Eine lineare Substitution zur Vereinfachung des Nenners ist praktisch.

(6) Berechnen Sie $\int dx \frac{\ln(2x)}{x}$, $\int x \ln\left(1+x^2\right) dx$, $\int dx \sqrt{1-2x^2}$.

(7) Hausaufgabe: Rechnen Sie das Integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ numerisch mittels Taschenrechners oder besser Computers so aus, dass Sie sicher sind, dass die zweite Stelle hinter dem Komma korrekt ist. Hinweis: Arbeiten Sie dazu mit Ober- und Untersummen.

(8) Diskutieren Sie die Schar der Niveaukurven des Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$. Hinweis: Für alle Feldwerte $c \neq 0$ können Sie eine Funktionenschar daraus machen. Schreiben Sie die auf, in angemessener Endform. Warum klappt das für den Feldwert $c = 0$ nicht? Wie sieht die Niveaukurve zum Feldwert Null aus? Behandeln Sie auch für alle die besagte Funktionenschar allgemein die Extremwertfrage.

(9) Man misst die Länge und die Breite eines Rechtecks zu (x_0, y_0) , jedoch mit Fehlern $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$. Also: Der korrekte Wert der Länge liegt im Intervall $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, analog der korrekte Wert für die Breite im Intervall $[y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y]$. Geben Sie in Näherung 1. Ordnung den Maximalfehler für den mit den ungenauen Messwerten zu $x_0 y_0$ ungenau bestimmten Flächeninhalt an. Setzen Sie nunmehr $x_0, y_0 > 0$ voraus, und geben Sie eine Formel für den relativen Fehler beim Flächeninhalt an.

Aufgaben zum Wochenende (4)

(1) Betrachten Sie die Schar von Funktionen $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{ax}$. Dabei sei $a \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Schar (es genügt eine grobe Skizze einiger Exemplare mit der Andeutung, was eine Veränderung von a bewirkt). Insbesondere sollten Sie die Lage eventueller Extrema in Abhängigkeit von a darstellen.

(2) Was ist der (vektorielle!) Mittelwert der Vektoren $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \le t \le \pi/4$? Können Sie dem einen physikalischen Sinn geben?

(3) Skizzieren Sie die Niveaukurven zum Skalarfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + xy$.

(4) Geben Sie eine Normalenform für die Tangentialebene an die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ im Kugelpunkte $2\left(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\right)$. Rechnen Sie auch nach, dass das ein Kugelpunkt ist.

(5) Geben Sie zur Funktion $f(x) = e^x$ eine nach Mittelwertsatz existierende Zahl $\xi \in]0, 2[$ konkret an, so dass $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ wird. Wie viele derartige Zahlen gibt es in diesem Fall?

(6) Welchen Wert hat $g(t)$, wenn $g(1) = 2$ und $g'(t) = t + \sin t$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt?

(7) Berechnen Sie folgende Integrale, achten Sie darauf, dass man bei einem bestimmten Integral eventuell den Wert sagen kann, ohne eine Stammfunktion ausrechnen zu müssen.

(a) $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{2+3x}\right) dx$, $\int_0^3 \sqrt[5]{x^2} dx$, $\int_{-1}^1 x^3 \cos^3(x) dx$, $\int_0^\pi \cos(4x) dx$.

(b) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{-3x+1}} dx$, schreiben Sie nun auch den Integranden von $\int \sin(x)\cos(x) dx$ so um, dass Sie $1/\alpha-$ Regel verwenden können (Additionstheoreme!). Rechnen Sie damit das unbestimmte Integral aus.

(c) $\int \frac{x}{(x-3)(x+1)} dx$

(d) (Umkehrung der Kettenregel:) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) dx$, $\int \sin(x)\cos(x) dx$ (vergleichen Sie das Resultat mit dem oben gewonnenen - Kommentar?).

(8) Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-x/3} dx$. Existiert $\int_0^1 \ln(ax) dx$? ($a > 0$ Parameter.)

(9) Rechnen Sie das Volumen des Hyperboloids aus, das man durch Rotation des Graphen von $f(x) = 1 + x^2$ im Bereich $[-h, h]$, $h > 0$, erhält. Versuchen Sie sich nunmehr auch an der Mantelfläche - verwenden Sie dazu als fertiges Resultat: $\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh} x$. Dabei ist $\operatorname{arcsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, wie bereits bekannt. Verifizieren Sie die Formel für das unbestimmte Integral durch Ableiten! Das auszurechnende Integral können Sie nun mittels $1/\alpha-$ Regel erhalten, wobei Sie mit den symmetrischen Grenzen auf die Symmetrie des Integranden achten sollten.