Übung (3)

1. Zeigen Sie, dass für $x, y > 0$ stets gilt: $\frac{1}{x+y} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Hinweis: Beseitigen Sie die Nenner, und machen Sie sich ausdrücklich klar, welche Grundtatsachen über Ungleichungen Sie verwenden.

2. Skizzieren Sie die Lösungsmengen im $\mathbb{R}^2$ der folgenden Ungleichungen:
$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 1 \\ \max(|x|, |y|) &\leq 1 \end{aligned}$$
Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit die Lösungsmenge von $\max(|x|, |y|) \leq a$ der Lösungsmenge von $|x| + |y| \leq 1$ genau einbeschrieben wird?

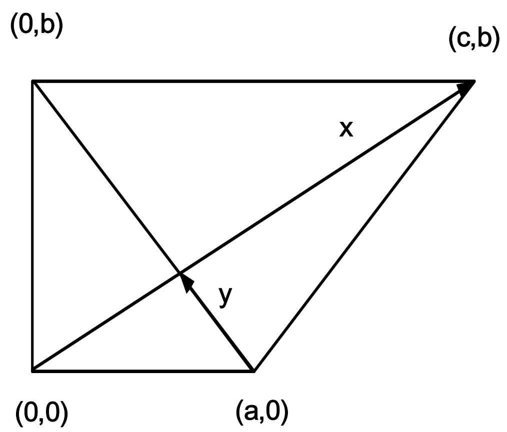
3. Machen Sie durch Ausschreiben der Summen klar, oder zeigen Sie gar induktiv folgende Gleichung: $(1-x)\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 - x^{n+1}$. Beantworten Sie daraus intuitiv: Wohin streben für $n \to \infty$ im Falle von $|x| < 1$ die Summen $\sum_{i=0}^{n} x^i$?

4. Beschreiben Sie in der Ebene *alle* Parabeln der Form $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, deren Achse parallel zur $y-$ Achse liegt und deren Graphen den Punkt (x_0, y_0) enthalten. Hinweis: setzen Sie an: $y = A(x - x_0)^2 + B(x - x_0) + C$, bestimmen Sie dann auch α, β, γ der oben stehenden Form. Wie viele freie Parameter verbleiben?

5. Sie teilen das Intervall $[a, b]$ $(a < b)$ in n gleich breite Streifen. Geben Sie eine allgemeine Formel für den $i-$ten Zwischenpunkt. Geben Sie natürlich dazu auch an, welchen Bereich i zu durchlaufen hat.

6. Teilen Sie das Quadrat aller Punkte (x, y) der Ebene mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ in ein Gitter ein aus m Streifen in Richtung der $y-$ Achse und n Streifen in Richtung der $x-$ Achse. Beschreiben Sie nun alle Gitterpunkte formelmäßig, unter Einbeziehung der Randpunkte.

7. Betrachten Sie folgende Skizze, und geben Sie die Koordinatendarstellungen für die freien Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ an. Geben Sie auch die Koordinatendarstellung des Diagonalenschnittpunktes. Wie kann man letztere unter Benutzung von $\vec{y}$ aus $(a, 0)$ erhalten?



Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1,-2,1)$ ein, mit vollem Quader.

2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2,3,-1)$.Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der $x-$ Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der $z-$ Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der $y-$ Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.

   (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?

   (b) die obere Würfelseitenfläche,

   (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,

   (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.

   (e) Auf dem Würfel steht eine vierseitige Pyramide, deren Grundseite ein Quadrat ist der Kantenlänge $2b$, $0 < b < a$. Die Höhe der Pyramide sei $h > 0$. Beschreiben Sie vektoriell die vordere Pyramiden-Seitenfläche. Tun Sie das elementar, überlegen Sie dazu nur, welchen Wert die $x-$ Koordinate haben muss, wenn man sich auf der Höhe r (gemessen von der Grundseite der Pyramide aus) befindet, $0 \leq r \leq h$. Ferner analog: In welchem Bereich kann auf dieser Höhe noch die $y-$ Koordinate variieren? Auf diese Weise erhalten Sie zwei freie Parameter mit Begrenzungen.

3. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P und Q, $\vec{x}_P = (1,-4)$, $\vec{x}_Q = (2,3)$. Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Winkel bildet sie mit der $x-$ Achse?

4. Welches Gebilde wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben? $\vec{x}(t) = (\sqrt{1+t^2}, t)$, $t \in \mathbb{R}$. (Kartesisches System.) Welche Symmetrie hat das Gebilde? Warum ist das kein Funktionsgraph mit der ersten Komponente als unabhängiger Variablen?

5. Setzen Sie ein dreidimensionales kartesisches System voraus. Geben Sie eine Koordinaten-Formel für die senkrechte Projektion auf die $xy-$ Ebene an, der Form $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung, wenn das System nicht kartesisch ist?

6. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2,3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

7. Sie haben im $\mathbb{R}^2$ ein Gitter mit Gitterpunkten (in Koordinatenform): (k,l), $k,l \in \mathbb{Z}$. Skizzieren Sie ein Stück davon für den typischen allgemeinen Fall eines nicht kartesischen Koordinatensystems. Geben Sie unendlich viele Richtungsvektoren verschiedener Richtungen für Ursprungsgeraden, auf denen unendlich viele Gitterpunkte sitzen. Geben Sie auch ein Beispiel für eine Ursprungsgerade, welche nur den Ursprung als einzigen Gitterpunkt enthält.

Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Lösen Sie allgemein die Gleichung (x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $3x^2 + ax - 4 = 0$. Lösen Sie ferner $x^4 + 2x^2 - 1 = 0$.

2. Seien definiert
$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},\ g(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D},$$
mit fest gegebenen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und A, B, C, D, so dass $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ und $AD - BC \neq 0$. Zeigen Sie, dass $g(f(x))$ wieder dieselbe Form hat, geben Sie also Zahlen a, b, c, d an, so dass
$$g(f(x)) = \frac{ax + b}{cx + d}$$
und sogar wieder $ad - bc \neq 0$.

3. Rechnen Sie aus, was $\sum_{k=1}^{n} k^3$ ergibt für $k = 1, 2, 3, 4$. Was für besondere Zahlen kommen heraus? Vermuten Sie eine Gesetzmäßigkeit, und versuchen Sie, diese induktiv zu beweisen. Erinnerung: $\sum_{k=1}^{n} k = n\,(n+1)\,/2$.

4. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, -3)$, $\vec{x}_Q = (1, 2, 1)$.

   (a) Geben Sie die Koordinatendarstellung des Mittelpunktes der Strecke $\overline{PQ}$.

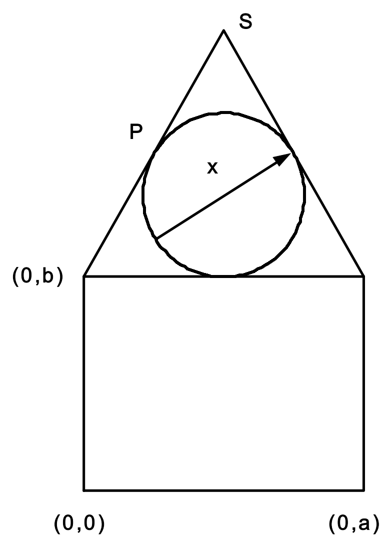
   (b) Geben Sie *zwei verschiedene* Parameterdarstellungen der Geraden g durch P und Q.

   (c) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 2, -2)$.

   (d) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch Projektion von g auf die $xy-$ Ebene parallel zur $z-$ Achse entsteht.

   (e) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte zwischen g und h, diese Geraden eingeschlossen.

5. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, das obere Dreieck ist gleichseitig, und der Kreis ist der Inkreis dieses Dreiecks, der Vektor $\vec{x}$ zeigt in Richtung der Winkelhalbierenden und hat genau die Länge des Kreisdurchmessers): Geben Sie die Koordinatendarstellungen für S und P sowie für den freien Vektor $\vec{x}$. Geben Sie auch eine Parametrisierung des Kreises.



6. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt (genau genommen ist es in einem der Beispiele noch etwas anders - in welchem?), entscheiden Sie weiter jeweils, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde bis auf e.

   a. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, -1+\lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (3\lambda, 2-5\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. c. Im $\mathbb{R}^2$: $2x^2 = y^2$. d. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2,1) + \mu(3,4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. e. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}\,(\lambda) = (1,2,2) + \lambda\,(1,1,1)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. f. Im $\mathbb{R}^3$: $x = y$. g. Im $\mathbb{R}^3$: $z = x^2 + y^2 + 1$ *und* $1 \leq z \leq 3$. h. Im $\mathbb{R}^3$: $z = x^2 + y^2 + 1$ *und* $z = 4$.