Übung (1)

1. Vereinfachen Sie folgende Rechenausdrücke:

$$\frac{a^3b^4}{a^5b^2},\ \frac{\frac{x^{-3}y^5}{a^3b^4}}{\frac{x^2y^6}{a^7b^3}} \quad = \quad ?\ \text{(Hauptbruchstrich!)},\ \frac{a^3b^4}{x^2y^2z}+\frac{a^4b^5}{x^3y^3u}-\frac{a^5b^3}{x^3y^4v}\ \text{(Ausklammern!)},$$

$$\sqrt[3]{64},\ 128^{-1/4},\ \sqrt{32}.$$

2. Was ist der Unterschied zwischen $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ und $\frac{2^3}{3}$?

3. Warum gilt $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$? Sprechen Sie genau aus, welche gültige Umformung hier vorliegt. Führen Sie eine solche Umformung mit $\frac{1}{1-3\sqrt{x}}$ derart durch, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht.

4. In welche Endform sollte man folgende (Bestimmungs-) Gleichung (mit x, y als Unbestimmten) bringen? (Tun Sie das *im Kopf!)*

$$2(y-x)+5(3-2y)+4=5+3x$$

   Skizzieren Sie die Lösungsmenge. Geben Sie auch die zugehörige Achsenabschnittsform, und lesen Sie die Achsenabschnitte daraus ab.

5. Wie die vorige Aufgabe, mit der Gleichung (darin sei nur x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $a\left(x^2-2+x\right)-(1-a)\,x=5\left(x-2x^2\right)$. Geben Sie allgemein für a die Lösungsmenge an.

6. Bringen Sie die Gleichung $4x^2+2x-3=0$ in die Formen $y=A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$ sowie $y=B\,(x+c)^2+d$. (Berechnen Sie also A,α,β,B,c,d.)

7. Eine Gerade geht durch die Punkte $(2,3)$ und $(3,5)$. Wie lautet die zugehörige Gleichung der Form $y=mx+b$? Wie lautet die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt $(2,3)$ geht und senkrecht auf der ersten Geraden steht? (Nutzen Sie dazu: Hat eine Gerade g in der Ebene Steigung $m\neq 0$, so hat eine dazu senkrechte Gerade Steigung $-1/m$.)

8. Es gilt folgende Formel (sie ist ein Spezialfall des 'Additionstheorems' für Tangens):

$$\tan(\alpha)=\frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)},$$

   sofern $\tan(\alpha)$ definiert ist. Sehen Sie nach, für welche Fälle der Ausdruck auf der rechten Seite nicht definiert ist. Sei nun α ein Winkel zwischen Null und unter 90 Grad. Benutzen Sie die Formel, um $\tan(\alpha/2)$ aus $\tan(\alpha)$ zu errechnen. Benutzen Sie dabei auch die Tatsache, dass der Tangenswert ≥ 0 wird für alle Winkel zwischen Null und unter 90 Grad, um ein eindeutiges Resultat zu erhalten. Testen Sie Ihr Rechenergebnis, indem Sie nachprüfen, dass für $\alpha=\pi/4$ (oder 45 Grad) genau $\tan(\pi/8)=\sqrt{2}-1$ herauskommt. ($\pi/8$ entspricht 22.5 Grad.) Gilt Ihre Formel auch für negative Werte α, deren Betrag $<\pi/2$ (oder 90 Grad) liegt? (Denken Sie an die Tatsache, dass $\tan(-\alpha)=-\tan(\alpha)$. Nutzen Sie nunmehr das Resultat für folgende Aufgabe: Ein Dreieck hat die zwei Eckpunkte $(-1,0)$ sowie $(1,0)$. Der dritte Eckpunkt habe die Koordinatendarstellung $(0,a)$, $a>0$. Zu diesem Dreieck ist der Mittelpunkt des Inkreises (d.h. der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden) gesucht. Hinweis: Denken Sie an die Tatsache, dass für eine Gerade der Form $y=mx+b$ gilt: m ist der Tangens des Winkels der Geraden zur $x-$ Achse - auch für negative Werte von m, wenn man den Winkel entsprechend misst.

Übung (2)

1. Welche der folgenden Gleichungen ist linear / quadratisch / Polynomgleichung / nichts davon in x? Lösen Sie die betreffenden Gleichungen im linearen und im quadratischen Fall.
$$\begin{aligned} a^2(1-x)^5 &= x^3\sin a, \\ \sin\left(x^2-1\right) &= x \\ x\sin a - 2 &= (3-x)\cos a \\ b^3(x-a)^2 &= x \end{aligned}$$
2. Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x^2+2y^2 &= 1 \\ 2x^2+y^2 &= 1 \end{aligned}$$
Deuten Sie zuvor die Aufgabe und ihre Lösung geometrisch. Sagen Sie damit voraus, wie viele Lösungen es geben sollte, sagen Sie auch etwas über die Symmetrien der Lösungen.
3. Wie viele Summanden ergeben sich bei sturem Ausdistribuieren von $(a+b+c)^5$? Eine gewisse Herausforderung: Können Sie systematisch ordnen und Koeffizienten angeben in Verallgemeinerung der binomischen Formel, auch für den allgemeinen Exponenten n statt 5?
4. Schreiben Sie folgende Summen aus (jeweils wörtlich so, wie sie stehen!):
$$\sum_{i=1}^{4} 2, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(i+i^2\right), \quad \sum_{i=1}^{3} i + \sum_{i=1}^{3} i^2, \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{2}(i+3j)\right), \quad \sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{3}(i+3j)\right),$$
und sehen Sie ein, dass und warum die ersten beiden und die letzten beiden jeweils denselben Wert ergeben.
5. Schreiben Sie folgende Summe aus: $\sum_{k=0}^{4}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$.
6. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:
$$\frac{x}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^7}{8}+\frac{x^9}{10}-\frac{x^{11}}{12}$$
7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 6 Leute aus 10 Leuten auszuwählen? (Kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie das Resultat im Kopf errechnen können.)
8. Wenden Sie die allgemeine binomische Formel $(a+b)^n = \ldots$ an auf den Fall $a=1$, $b=-1$. Geben Sie dem Resultat eine kombinatorische Deutung: Was sagt es über die Anzahl der geradzahligen und die Anzahl der ungeradzahligen Teilmengen einer Menge von n Objekten? Welches kombinatorische Resultat erhalten Sie bei Anwendung auf den Fall $a=b=1$?
9. Verwenden Sie für den Betrag reeller Zahlen die Tatsachen $|a+b| \leq |a|+|b|$ ('Dreiecksungleichung') sowie $|ab| = |a|\cdot|b|$, in der verallgemeinerten Form auf jede endliche Zahl von Gliedern. Verwenden Sie ferner die Tatsache, dass eine Ungleichung bei Multiplizieren beider Seiten mit einer positiven Zahl bestehenbleibt. Finden Sie eine hinreichende Bedingung dafür, dass für $n \geq 1$ und beliebige Zahlen a_i, $1 \leq i \leq n-1$, gilt: $|x^n| > \left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i\right|$ und also x keine Nullstelle des Polynoms $x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ sein kann. Hinweis: Fordern Sie $|x|>1$, und finden Sie die rechte Bedingung zum Vergleich von $|x|$ mit den Beträgen der Koeffizienten a_i. Folgern Sie aus dem Resultat, in welchem Bereich um Null alle Nullstellen eines Polynoms $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ liegen müssen.