

## Übung (1)

1. Vereinfachen Sie folgende Rechenausdrücke:

$$\frac{a^3 b^4}{a^5 b^2}, \frac{\frac{x^{-3} y^5}{a^3 b^4}}{\frac{x^2 y^6}{a^7 b^3}} = ? \text{ (Hauptbruchstrich!)}, \frac{a^3 b^4}{x^2 y^2 z} + \frac{a^4 b^5}{x^3 y^3 u} - \frac{a^5 b^3}{x^3 y^4 v} \text{ (Ausklammern!)},$$

$$\sqrt[3]{64}, \sqrt{32}, \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} / 27 \text{ (exakte Resultate!)}$$

2. Rechnen Sie im Kopf (!) durch Übersicht den Koeffizienten bei  $x^3$  aus, der beim Ausmultiplizieren von  $(1 + x^2 + x^4)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)$  entsteht.
3. Warum gilt  $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ? Sprechen Sie genau aus, welche gültige Umformung hier vorliegt. Führen Sie eine solche Umformung mit  $\frac{1}{3+4\sqrt{x}}$  derart durch, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht. Wie sollte man nunmehr  $\frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{2}{3+4\sqrt{x}}$  ausrechnen? Welche Gestalt sollte die Endform haben? (Hinweis: Vermeiden Sie auch Nutzloses!) Wie lösen Sie andererseits die Gleichung  $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-\sqrt{a}} + \frac{1}{2+\sqrt{b}}$  (Unbestimmte  $x$ , äußere Parameter  $a, b$ )?
4. Begründen Sie sorgfältig, dass die Gleichung  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$  *niemals* wahr ist, also kein einziges Lösungspaar besitzt. (Hinweis: Bringen Sie die Gleichung in eine einfache Standard-Form, und fassen Sie diese dann als Gleichung mit einer Unbestimmten und einem äußeren Parameter auf.)
5. Wie lautet die Achsenabschnittsform der Geraden, die durch  $y = -\frac{3}{4}x - 5$  beschrieben ist?
6. Geben Sie Formeln an, mit deren Hilfe man direkt zu einer Geraden der Form  $y = mx + b$ ,  $m, b \neq 0$ , die benötigten  $\alpha, \beta$  für die zugehörige Achsenabschnittsform  $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$  berechnen kann.
7. Betrachten Sie, und bringen Sie auf Endform(en) die Gleichung (darin sei nur  $x$  Unbestimmte,  $a$  äußerer Parameter)  $a(x^2 - 4 + x) - (3 - a)x = 5(x - 2x^2)$ . Geben Sie allgemein für  $a$  die Lösungsmenge an.
8. Bringen Sie die Parabelgleichung  $y = -3x^2 + 2x + 5$  in Scheitelpunktsform, lesen Sie daraus auch die Koordinaten des Scheitelpunktes wirklich ab.
9. Welche Parabeln der Form  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , haben ihren Scheitelpunkt in  $(x_0, y_0)$ ? Wie viele freie Parameter sollten Sie haben, und wie sind die geometrisch zu deuten?
10. Sei  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ , mit äußeren Parametern  $a, b, c, d$ ,  $c \neq 0$ . Unter welcher Bedingung ist dann  $f(1)$  definiert? Was kommt heraus bei  $f(f(x))$ ? Hinweis: Endform natürlich ohne Doppelbruch!
11. Nehmen Sie für Zahlen  $a \in \mathbb{R}$ ,  $0 \neq b \in \mathbb{R}$ , die *Definition*: Der Buch  $\frac{a}{b}$  ist die (eindeutig bestimmte) Lösung  $x$  der Gleichung  $xb = a$ . Beweisen Sie damit - und nur mit den üblichen Rechenregeln für die Multiplikation, die nicht von Brüchen handeln - die üblichen Regeln für die Multiplikation und die Division von Brüchen.

## Übung (2)

1. Betrachten Sie die Parabeln  $y = x^2 + ax + 1$ , für alle reellen Werte des äußeren Parameters  $a$ . Geben Sie in Abhängigkeit von  $a$  die Koordinaten des Scheitelpunktes an. Welche geometrische Bedeutung hat  $a$ ? (Formulieren Sie das einmal so, dass Sie beschreiben, wie man aus der Parabel  $y = x^2$  die mit einem beliebigen Wert von  $a$  geometrisch gewinnen kann). Skizzieren Sie die Menge der Scheitelpunkte aller Parabeln der Form  $y = x^2 + ax + 1$ .
2. Wie groß muss  $x > 0$  sein, damit  $\frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$  wird für eine vorgegebene Zahl  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$  sehr nahe bei Null, also viel kleiner als 1?
3. Rechnen Sie in der Form  $y = mx + b$  die Tangente(n) an die Parabel  $y = x^2$  aus, die durch den Punkt (3; 4) geht. Nutzen Sie dabei lediglich die geometrische Bedingung der Berührung, nicht etwa eine Ableitung.
4. Schreiben Sie die ausmultiplizierte Endform auf für  $(a - b)^6$ . Benutzen Sie dabei die allgemeine binomische Formel.
5. Wie viele Summanden ergeben sich, wenn man  $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)$  ausmultipliziert? Schreiben Sie das Produkt auch mit großem Summenzeichen. Konkretisieren Sie das Ganze mit  $n = 3$ ,  $m = 2$ . (Schreiben Sie für diesen Fall alle Summen aus.)
6. Schreiben Sie folgende Summen aus (jeweils wörtlich so, wie sie stehen!):

$$\sum_{k=1}^3 (-1)^k (k + k^2), \quad \sum_{k=1}^3 (-1)^k k + \sum_{k=1}^3 (-1)^k k^2, \quad \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^2 (i - 2j) \right), \quad \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{i=1}^3 (i - 2j) \right),$$

und sehen Sie ein, dass und warum die ersten beiden und die letzten beiden jeweils denselben Wert ergeben.

7. Schreiben Sie folgende Summen mittels des großen Summenzeichens:

$$1 + 3x^3 + 5x^6 + 7x^9, \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \frac{x^8}{5} - \frac{x^{10}}{6}$$

8. Welchen Wert hat  $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^i ij$ ? Bekommen Sie eine allgemeine Formel hin zur Berechnung von  $f(n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i ij$ ? Hinweis: Das sollte, weil die Differenz zwischen  $f(n+1)$  und  $f(n)$  ein Polynom dritten Grades ist, ein Polynom vierten Grades sein.

### Übung (3)

1.  $c_1, c_2, c_3$  mögen Zahlwerte  $> 0$  haben. Um wieviel Prozent und in welcher Richtung verändert sich der Wert von  $\frac{c_1 \cdot c_2^2}{c_3^4}$ , wenn man (zugleich) den Wert von  $c_1$  um 3% erhöht, den von  $c_2$  um 2% senkt und den von  $c_3$  um 4% senkt? Ist die Antwort unabhängig von den Ausgangswerten? Kann man das Resultat im Kopf grob überschlagen?
2. Begründen Sie sorgfältig, dass aus  $x > 1$  folgt:  $0 < \frac{1}{x} < 1$ . Benutzen Sie dabei lediglich die Aussagen  $x \frac{1}{x} = 1$  und: Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $ac < bc$ . Dazu:  $0 < 1$ , und natürlich die fundamentalen Eigenschaften jeder totalen Ordnung.
3. Welche Ordnungsbeziehung können Sie für  $a^2, b^2$  folgern, wenn Sie  $a < b$  und  $a > 0$  wissen? (Sie dürfen voraussetzen als allgemeingültig: Wenn  $a < b$  und  $c > 0$ , so  $ac < bc$ .) Welche Beziehung können Sie dagegen für  $a^3, b^3$  folgern, wenn Sie nur  $a < b$  voraussetzen? Warum klappt das hier, aber beim Quadrat nicht?
4. Seien  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  und  $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$  Polynome der Grade  $n$  bzw.  $m$ , also  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$  mit beliebigen  $n, m \in \mathbb{N}$ . Überlegen Sie, dass dann  $f(x)+g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  und  $f(g(x))$  ebenfalls Polynome sind, welche Grade sie haben und mit welchen Rechenschritten man sie auf nach Potenzen geordnete Endform bringen kann. Geben Sie ferner allgemein diese Endformen an, unter Nutzung des großen Summenzeichens. (Sie benötigen Formeln zur Errechnung der Koeffizienten.)
5. Führen Sie als Division mit Rest aus:  $(-2x^3 + 4x^2 - 2x + 1) : (x^2 - 1)$ , und schreiben Sie anschließend eine Gleichung der Form  $(-2x^3 + 4x^2 - 2x + 1) = q(x)(x^2 - 1) + r(x)$ , wobei  $q$  ein Polynom und  $r$  eine gebrochen rationale Funktion ist. Denken Sie an 'schriftliches Dividieren' bei ganzen Zahlen, das geht hier genau so: Teilen Sie immer nur durch den leitenden Term - hier  $x^2$  - des Divisors, und ziehen Sie anschließend das Resultat mal Divisor ab von dem, was vom Dividenden noch übrig ist. Es bleibt ein Restpolynom von kleinerem Grad als der Divisor hat.
6. Sie teilen das Intervall  $[a, b]$  ( $a < b$ ) in  $n$  gleich breite Streifen. Geben Sie eine allgemeine Formel für den  $i$ -ten Zwischenpunkt. Geben Sie natürlich dazu auch an, welchen Bereich  $i$  zu durchlaufen hat.
7. Teilen Sie das Quadrat aller Punkte  $(x, y)$  der Ebene mit  $a \leq x \leq b$  und  $c \leq y \leq d$  in ein Gitter ein aus  $m$  Streifen in Richtung der  $y$ - Achse und  $n$  Streifen in Richtung der  $x$ - Achse. Beschreiben Sie nun alle Gitterpunkte formelmäßig, unter Einbeziehung der Randpunkte.
8. Finden Sie ein rein kombinatorisches Argument dafür, dass für  $k \geq 1$  und  $n \geq k$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ , gilt:  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ .

## Übung (4)

1. Zeichnen Sie in einem zweidimensionalen kartesischen System den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $(2, -1)$  ein. Zeichnen Sie nunmehr die Vektoren  $\vec{a}_1 = (1, 1)$ ,  $\vec{a}_2 = (0, 2)$  ein, und betrachten Sie diese als Einheitsvektoren eines neuen Koordinatensystems. Lesen Sie die Koordinaten von  $P$  in diesem neuen System ab - Skizze!). Prüfen Sie die gefundenen Koordinaten durch kleine Rechnung.
2. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem  $K$  den Punkt  $P$  mit  $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$  ein, mit zugehörigem Quader.
3. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge  $a$  liege achsenparallel mit Mittelpunkt in  $(2, 3, -1)$ . Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der  $x$ - Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der  $z$ - Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der  $y$ - Achse (Verwenden Sie natürlich eine Skizze):
  - (a) Alle Eckpunkte,
  - (b) die obere Würfelseite,
  - (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raundiagonale des Würfels,
  - (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseite, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.
4. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch  $P$  und  $Q$ ,  $\vec{x}_P = (2, -4)$ ,  $\vec{x}_Q = (3, 3)$ . Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Winkel bildet sie mit der  $x$ - Achse?
5. Es seien in der Ebene eine Gerade vorgegeben durch  $y = mx + b$  sowie ein Punkt  $P$  mit der Koordinatendarstellung  $(x_0, y_0)$  außerhalb der Geraden. Geben Sie ein rechnerisches Kriterium an, mit dem man ohne weiteres entscheiden kann, ob ein weiterer ebenfalls nicht auf der Geraden liegender Punkt mit der Koordinatendarstellung  $(\alpha, \beta)$  von  $P$  aus gesehen jenseits der Geraden liegt.
6. Welches Gebilde wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben?  $\vec{x}(t) = (t, 1/t + 1)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ . (Kartesisches System.)
7. Welches geometrische Gebilde im  $\mathbb{R}^3$  wird durch die Bedingung beschrieben, dass  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  und  $0 \leq z \leq 3$ ? (Kartesisches System.)
8. Betrachten Sie in der Ebene ein kartesisches System. Der Punkt  $P(a)$  habe die Koordinatendarstellung  $(a, 0)$ ,  $a > 0$ . Finden Sie den Punkt  $Q(a)$  mit positiver  $y$ - Koordinate, der zusammen mit dem Ursprung und  $P(a)$  ein gleichseitiges Dreieck bildet. Geben Sie auch eine Parameterdarstellung des Inkreises von diesem Dreieck. (Hinweis: Nutzen Sie die Tatsache, dass der Mittelpunkt des Inkreises die Höhen des Dreiecks im Verhältnis 2:1 teilt.)
9. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in  $x$ - Richtung, großer der Länge 4 in  $y$ - Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in  $(-3, 4)$  landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.