Übung (16)

(1) Sie haben eine sinusförmige (Wechsel-) Spannung und ebensolche Stromstärke, $U(t) = \sin(\omega t + \varphi)$, $I(t) = \sin(\omega t)$, für alle t, also mit derselben Frequenz, nur phasenverschoben gegeneinander, wie das bei Wechselstromwiderständen auftritt. Welche mittlere Leistung des Stromes (die man naheliegend als den Mittelwert über eine volle Periodendauer berechnet) ergibt das? (Hinweis: Leistung gleich Stromstärke mal Spannung, das gilt auch bei Wechselstrom, nur ist das jeweils die Leistung zur Zeit t, $U(t) \cdot I(t)$.) Zusatzfrage: Wie ändert sich das Ergebnis, wenn man beliebige Amplituden U_0, I_0 noch bei $U(t)$, $I(t)$ anbringt? Hinweis zur Berechnung des Integrals: Verwenden Sie die bekannte algebraische Umformung von Ausdrücken der Form $\sin(x)\sin(y)$ mittels der Additionstheoreme.

(2) Eine Bewegung startet im Punkt $(1,0,0)$ zur Zeit $t = 0$, mit Geschwindigkeitsvektor $(0,1,0)$. Zu jeder Zeit ist der Beschleunigungsvektor $\vec{x}''(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Bewegung aus (grobe Skizze)? Rechnen Sie mit bestimmten Integralen.

(3) Sie lassen die Ellipse $\vec{x}(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $0 \leq t < 2\pi$, um die $x-$ Achse rotieren. Welches Volumen hat das entstehende Ellipsoid? Versuchen Sie auch, Ihre Formel ein wenig zu prüfen. (Wie gehen a und b ein?)

(4) Berechnen Sie $\int \frac{x^2}{x^2-1} dx$.

(5) Berechnen Sie

$$\int \frac{1}{x(x-1)(x+1)} dx.$$

Schließen Sie sofort daraus, was $\int \frac{1}{x(x-1)(x-2)} dx$ sein muss. Wie kann man schnell grob qualitativ den Graphen von $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}$ ermitteln?

(6) Berechnen Sie (möglichst durch Umkehrung der Kettenregel) $\int \sin(x)\cos(x) dx$. Welche Substitution kann man ausführen, bei der man den Ableitungsfaktor vorfindet? Vergleichen Sie das Resultat mit dem, was naheliegende Umformung des Interganden ergibt. Kommentar zu beiden Resultaten?

(7) Berechnen Sie $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$. Hinweis: Das geht (ausnahmsweise) sogar mit partieller Integration, aber auch mit der einfachen Substitution $u = x + 1$.

(8) Berechnen Sie $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$. Hinweis: Führen Sie die Substitution $u = 1+\sqrt{x}$ durch. Denken Sie daran, dass Sie nach x auflösen sollten, um dx mittels der neuen Integrationsvariablen auszudrücken und Entsprechendes für dx einsetzen zu können.

Aufgaben zum Wochenende (4)

Hinweis: Die Aufgaben 1-3 haben den Charakter einer Probeklausur. (4 Stunden Zeit, anschließend sollten Sie jedoch ausbügeln, was Sie nicht geschafft haben.)

(1) (a) Es seien in einem kartesischen System die Ortsvektoren der Punkte P, Q beschrieben durch: $\vec{x}_P = (2,3,-1)$, $\vec{x}_Q = (1,1,-2)$. Es sei die Ebene E beschrieben durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$.
   (i) Stellen Sie fest, ob die Gerade g durch P und Q die Ebene E schneidet.
   (ii) Wie weit ist P von E entfernt?
   (iii) Welchen Winkel bildet g mit der $xy-$ Ebene?
   (iv) Wie weit ist der Punkt R, $\vec{x}_R = (2,-1,4)$, von g entfernt? (Skizze! Bilden Sie einen Lotvektor von R auf g über eine senkrechte Projektion).
   (v) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck PQR? (Hinweis: Nutzen Sie das Vektorprodukt!)

(b) Lösen Sie (d.h. geben Sie die Lösungsmenge in parametrisierter Form an (!)) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 1 \\ 3x - 2y + 2z &= 2 \\ -3x + 7y - z &= -1 \end{aligned}$$

Zusatzfragen: Wie kann man das Problem geometrisch deuten? Können Sie den Kern der zugehörigen linearen Abbildung sofort aus Ihrem Resultat ablesen?

(c) *) Beschreiben Sie die Menge der Punkte, die von der $xy-$ Ebene und vom Punkt $(0,0,2)$ gleich weit entfernt sind, in Gleichungsform, in parametrisierter Form und mit einer groben Skizze.

(2) (a) Lösen Sie die Gleichung $\frac{z-j}{z} = 3 + j$.
   (b) Welchen Winkel bilden die komplexen Zahlen $e^{-j\pi/4}$ und $2 - 2\sqrt{3}j$ miteinander?

(3) (a) Wie sieht die Näherung 1. Ordnung aus für $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x+1)}$, für kleine Beträge von x?
   (b) Welche wesentlichen Eigenschaften hat die Funktion $g(x) = x^2\sqrt{2 - x^2}$
   (c) (im maximalen reellen Definitionsbereich)? (Die genaue Lage von Wendepunkten muss nicht bestimmt werden, sagen Sie nur etwas darüber, wie viele Wendepunkte es mindestens geben muss, gemäß grober Skizze des Graphen, die Sie natürlich anfertigen sollten.)
   (d) Definieren Sie eine Funktion g_1, deren Graph wie der von g aus 3 b aussieht, nur längs beider Achsen mit dem Faktor 2 gestreckt.
   (e) Was liefert die de L'Hospitalsche Regel zum Verhalten der Funktion $h(x) = \frac{x}{1-e^x}$ in beliebig kleiner Umgebung der Definitionslücke $x = 0$?
   (f) Berechnen Sie $\int dx\sqrt{2 - \frac{1}{4}x}$, $\int \frac{x}{(2x-1)(3-4x)}dx$, $\int \frac{x^2}{1-x^3}dx$ (Hinweis: Das letzte Integral können Sie aufgrund seiner speziellen Gestalt bequem mit Umkehrung der Kettenregel bzw. simpler Substitution ausrechnen.)

(4) Hier sind noch ein paar Integrale zum Üben: $\int \frac{x^3}{(x-1)(x-2)}dx$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int x^2e^x dx$.

(5) Transformieren Sie die Logarithmusfunktion ln derart, dass ihr Graph die Gerade $y = x$ berührt.

(6) Betrachten Sie die Funktionen $f_{2n}(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, im Bereich $[-1,1]$. Wie entwickeln sie sich mit wachsendem n? Nutzen Sie diesen Umstand, um Funktionen zu produzieren, deren Graphen nahezu kastenförmig sind (also von einem Plateau aus sehr steil zur $x-$ Achse abfallen. Regulieren Sie zusätzlich Breite und Höhe sowie Lage des Plateaus.

(7) Rechnen Sie bei Aufgabe 3 b auch die Wendepunkte aus (Abszissenwerte genügen natürlich).

Übung (17)

(1) Berechnen Sie $\int \frac{2x+1}{(x-2)^5}dx$. Was fällt Ihnen bei diesem Beispiel zum Stichwort 'Partialbruchzerlegung' ein?

(2) Berechnen Sie $\int \frac{x}{(x-1)^2(x-2)}dx$.

(3) Welche Länge hat die Bahn der Kurve $\vec{x}\,(t) = t\,(\cos t, \sin t)\,,\ 0 \leq t < 2\pi$? Hinweis: Benutzen Sie als fertigen Modul folgende Stammfunktion:

$$\int \sqrt{1+t^2}dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right).$$

(4) Zeigen Sie, dass folgende Funktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte definiert (es genügt, dass alle Werte ≥ 0 sind und das Integral über die gesamte reelle Zahlengerade existiert und den Wert 1 besitzt):

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 3e^{-3t} \text{ für } t \geq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Antreffen von Werten im Bereich $[0,2]$ bei einer Zufallsgröße, deren Verteilung durch die Dichte f beschrieben wird.

(5) Berechnen Sie die $x-$ Koordinate x_M des Schwerpunkts der Fläche, die zwischen $x-$ Achse und dem Graphen von $g(x) = x^2$ im Bereich $[0,3]$ eingeschlossen wird und homogene Massenverteilung besitzt. Hinweis: Erinnern Sie sich an die gewichtete Mittelbildung für den Schwerpunkt einer Massenverteilung von endlich vielen Massenpunkten. Verfolgen Sie konsequent den Gedanken der gewichteten Mittelbildung, nur hier über ein Kontinuum. Sind die Flächenstücke zwischen Parabel und $x-$ Achse zu beiden Seiten von x_M gleich?

(6) Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}\,(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)\,,\ 0 \leq t < 2\pi$, und machen Sie sich anschaulich klar, wie die Bahn aussieht. Bilden Sie nunmehr eine Fläche durch die Vereinigung aller Strecken, welche jeweils vom Ursprung aus zu einem der Kurvenpunkte gehen. Wie könnte man diese Fläche parametrisieren? Berechnen Sie über die Sektorenformel den Inhalt dieser Fläche. Überlegen Sie, wie der Flächeninhalt für die Kurve $\vec{y}\,(t) = r\vec{x}\,(t)$ aussehen muss.

(7) Skizzieren Sie grob die Niveaukurven zum Feld

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x^2 + y^2 \end{array}.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden, welche durch den Punkt $(3,2)$ läuft und senkrecht zur Niveaukurve durch diesen Punkt verläuft. Geben Sie lineare Abschätzung des Höchstfehlers an, wenn man Messwerte $x_0 = 2$, $y_0 = -4$ hat und mit Messfehlern von höchstens dem Betrag 0.005 in beiden Eingabewerten rechnen muss.

Abschließende Übungen zur Wiederholung (Mi und Do)

(1) Lösen Sie das Gleichungssystem (allgemein mit dem äußeren reellwertigen Parameter a):

$$\begin{aligned} (a+1)\,x+2y+3z &= 1 \\ 3x-ay+2z &= 0 \end{aligned}.$$

Deuten Sie die Aufgabe geometrisch. Wenn Sie z als freien Parameter wählen, benötigen Sie keine Fallunterscheidung - überlegen Sie dazu auch, wie Sie direkt mit einem Vektorprodukt ein wichtiges Teilresultat erhalten können. Geben Sie (in ordentlicher Endform) die Lösungsmenge für jeden Wert von a an.

(2) Seien $\vec{a}=(1,2,-3)$, $\vec{b}=(2,-3,4)$. Geben Sie den Winkel zwischen den Diagonalen des von $\vec{a},\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms an.

(3) Was hat der Ausdruck $(\vec{x}+\vec{y})\,\vec{x}+(\vec{x}+\vec{y})\,\vec{y}$ (Vereinfachung?) mit den Diagonalen des von $\vec{x},\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms zu tun?

(4) Sei die Ebene E beschrieben durch $x+2y+z=1$. Zerlegen Sie den Vektor $(0,0,2)$ in einen Vektor senkrecht zur Ebene E und einen Vektor parallel zu E. Beschreiben Sie die Ebene F, welche parallel zu E liegt und durch den Punkt $(1,2,-1)$ geht. Welchen Abstand hat F von E?

(5) Geben Sie die Gerade im $\mathbb{R}^2$ an, welche die Parabel $y=x^2$ im Punkt $(2,4)$ berührt. Tun Sie das in Parameterform und in Gleichungsform. Welche Gerade geht senkrecht zur Parabel durch den Punkt $(2,4)$?

(6) In welchen Winkeln trifft der Graph der Funktion $f(x)=x^3-x$ die $x-$ Achse? (Gehen Sie möglichst praktisch vor.)

(7) In welchen Punkten trifft die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda)=(1,1,2)+\lambda\,(2,-1,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, die Fläche im $\mathbb{R}^3$, welche durch $x^2+y^2=5$ beschrieben ist? Was für eine Fläche ist das?

(8) Welche Matrix beschreibt die Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ an der Geraden $y=x$?

(9) Seien $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Was wissen Sie dann über $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$? Zeigen Sie, d. h. rechnen Sie nach, dass dann der Vektor $\vec{a}^*=\frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)}$ folgende Eigenschaften hat: $\vec{a}^*$ steht senkrecht auf $\vec{b}$ und auf $\vec{c}$, und $\vec{a}^*\vec{a}=1$. Zusatzfragen: Wie können Sie nunmehr einen Vektor finden, der sinngemäß mit entsprechenden Eigenschaften als $\vec{b}^*$ fungieren könnte? Wie würde man eine Gleichung $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ für gegebenen Vektor $\vec{x}$ dann lösen, wenn man $\vec{a}^*,\vec{b}^*,\vec{c}^*$ besitzt?

(10) Sei $z=2e^{-j\pi/3}$. Geben Sie z^7 in polarer und in kartesische Endform an.

(11) Sei $z=re^{j\varphi}$. Wie sieht dann die polare Endform aus von $\frac{z}{\overline{z}}$?

(12) Lösen Sie die Gleichung $z+2\overline{z}=2-3j$.

(13) Bringen Sie in kartesische Endform: $\frac{(3-j)(4+j)}{2j-1}$.

(14) Lösen Sie die Gleichung $\ln\left(\sqrt[3]{x^4}\right)=5$.

(15) Machen Sie sich unmittelbar klar, wie der Graph zu $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$ aussieht. (D.h. stellen Sie nur das Wesentliche kurz fest, ohne Ableitung etc.) Erkären Sie sich daraus auch den Verlauf von $g(x)=\ln(f(x))$. Bilden Sie aber auch die erste Ableitung von g zur Übung, und stellen Sie fest, was Sie damit zur Frage der (stückweisen) Monotonie von g sagen können - das sollte natürlich im Einklang mit Ihrer unmittelbaren Beobachtung sein.

(16) Welchen Phasenwinkel bilden Strom und Spannung bei Wechselspannung im Reihenschwingkreis ($R-$ Glied, $L-$ Glied und $C-$ Glied in Reihe) mit Frequenz ω miteinander? (Hinweis: Das ist genau der Winkel zwischen den komplexen Zahlen U und I, welche durch das weiterhin gültige Gesetz $ZI=U$ miteinander verbunden sind, mit dem Gesamtwiderstand Z.)

(17) Betrachten Sie die Funktion $h(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich.

(a) Was ist dieser maximale reelle Definitionsbereich?

(b) Was liefert Vorzeichenbetrachtung?
(c) Was können Sie der Ableitung entnehmen, insbesondere zur Frage der Monotonie und der Existenz lokaler Extrema?
(d) Hat die Funktion ein Extremum (lokal oder sogar global)? (Bringen Sie Ihre Beobachtung in Einklang mit dem, was Sie zu c. gesagt haben.)
(e) Wie ist das Verhalten für $x \to \infty$? Sehen Sie das durch Vernachlässigen bzw. geeignetes Kürzen ein. Kann man es auch mit de L'Hospital begründen?
(f) Skizzieren Sie grob den Graphen.
(g) Bilden Sie eine Stammfunktion für f. Hinweis: Es sollte Ihnen eine einfache Substitution naheliegen. Genauer sollten Ihnen zwei leicht verschiedene Substitutionen naheliegen. Überzeugen Sie sich, dass beide funktionieren.
(h) Was können Sie aus Ihrer Beobachtung allgemein zur Berechenbarkeit von Stammfunktionen solcher Funktionen sagen, welche gebrochen rationale Funktionen in $\sqrt{x}$ sind?

(18) Betrachten Sie die Funktion $k(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich. Vergleichen Sie mit h aus der vorigen Aufgabe. Stellen Sie auch hier alles Relevante zusammen. Sie sollten insbesondere wieder auch die erste Ableitung bilden und alle in Aufgabe 15 gestellten Fragen (bis g) beantworten.

(19) Wie sieht der Graph der Funktion $f(x) = x\tan(x)$ aus? (Nur grob das Wesentliche im Vergleich zu $\tan$.) Dieselbe Frage für $g(x) = x\tan^2(x)$. (Bilden Sie zwar jeweils die erste Ableitung, sehen Sie aber, dass sie Ihnen hier keine großen Dienste leistet. Geben Sie ganz grobe Skizzen und verbale Beschreibungen. (Hinweis: Es sollte mittlerweile selbstverständlich sein, auf die Frage nach Standard-Symmetrien achtzugeben.)

(20) Machen Sie sich die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ sowie $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ klar. Erklären Sie sich daraus auch den Verlauf von $h(x) = f(x)\sqrt{1+x^2}$ sowie $k(x) = g(x)\sqrt{1+x^2}$. Beschreiben Sie die am besten im Vergleich zu f und g. Tun Sie nichts mit Ableitungen, außer der Beachtung von $f'(0)$.