Aufgaben zum Wochenende (3)

Erster Block: Wiederholungen zur Vektorrechnung

(1) Es sei die Gerade g gegeben durch $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,3) + \lambda(2,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ferner die Ebene E durch die Gleichung $x - y - z = 1$.

(a) Wie können Sie sofort sehen, dass g parallel zu E liegt? Welchen Abstand hat g von E?

(b) Welchen Winkel bildet E mit der Ebene F, die durch $\vec{x}_F(\lambda,\mu) = \lambda(1,2,-1) + \mu(3,1,1)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, parametrisiert ist?

(c) Ein Teilchen hat (zur Zeit $t = 0$) den Ort $(1,2,2)$, die Geschwindigkeit $(2,3,3)$, und auf dies Teilchen wirke nur die Schwerkraft $(1,1,-3)$. Geben Sie den Ort als Funktion der Zeit an. Schneiden Sie die Bahn des Teilchens mit E. (Geben Sie nur die Zeitpunkte genau an, zu denen die Schnittpunkte erreicht werden, setzen Sie nicht mehr konkret ein, sondern formulieren Sie die Schnittpunkte nach geeigneten Definitionen symbolisch!) In welchen Winkeln trifft das Teilchen auf E? (Geben Sie hier ebenfalls die Resultate nur symbolisch!)

(2) Es sei vorausgesetzt, dass der von den Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannte Spat das Volumen v hat und dass $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Was kommt dann heraus bei $2\vec{b}(5\vec{a} \times 3\vec{c})$?

(3) Sei $0 < b < a$. Rechnen Sie nach, dass jeder Punkt der Ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ die gleiche Summe der Abstände zu den Punkten $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ besitzt.

Zweiter Block: Zu den komplexen Zahlen

(1) Geben Sie folgende Zahlen in kartesischer Endform an: $z = \frac{3-4j}{2-3j}$, $z_1 = 2e^{-j\pi/3}$.

(2) Lösen Sie die folgende Gleichung in $\mathbb{C}$: $\frac{2z-j}{zj-2} = 3 + j$.

(3) Wie sieht die Gesamtheit aller komplexen Zahlen aus, welche sich in der Form $z + j\overline{z}$ darstellen lassen, mit beliebiger komplexer Zahl z? (Rechnen Sie etwas - wie sollte man z ansetzen? -, skizzieren Sie die Menge als Punktmenge, und geben Sie eine Parameterdarstellung dafür (mit *reellen* Parameterwerten!).

Dritter Block: Zu den Funktionen

(1) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\sqrt{\frac{1}{100} + \sin(x)}$ für kleine Beträge von x. Welchen relativen Fehler haben Sie für $x = -\frac{1}{200}$ bei dieser Näherung? Kommentar zum Resultat?

(2) Sehen Sie mit den Additionstheoremen ein, dass $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ einen sehr einfachen Graphen hat, und skizzieren Sie den grob.

(3) Bilden Sie folgende Ableitungen: $\frac{d}{dx}\sin^3(x)$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\frac{d}{dx}\frac{x^3-1}{x^3+1}$. Skizzieren Sie auch grob die Graphen der zugehörigen Funktionen, nachdem Sie maximalen reellen Definitionsbereich sowie alle jeweils wesentlichen Eigenschaften genannt haben. Dabei soll auch alles Wichtige sein, das man jeweils von der ersten Ableitung lernen kann.

(4) Diskutieren Sie die Funktionenschar $f_\alpha(x) = xe^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Unterscheiden Sie Fälle, skizzieren Sie für jeden Fall grob den Graphen. Klären Sie mit der ersten Ableitung auch quantitativ die Frage nach Extremwerten.

(5) Basteln Sie eine Funktion, welche im Bereich $]0,1]$ unendlich viele Pole besitzt.

Übung (13)

(1) Sei $f(x) = \frac{\sin^2(x)-\cos(x)}{2+\sin(x)}$ Sei $x_0 = \pi/2$. Rechnen Sie nach, welchen absoluten und welchen relativen Fehler Sie machen, wenn Sie die Ableitung $f'(x_0)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mit $\Delta x = \frac{1}{100}$ nähern. Sie sollten die Ableitung vernünftig vereinfachen und $f'(x_0)$ im Kopf ausrechnen können!

(2) Wie sehen die Graphen der Funktionenschar $g_\beta(x) = \frac{e^{x-\beta}}{1+e^{x-\beta}}$, $\beta \in \mathbb{R}$, aus? Welchen Einfluss hat der Parameter β? Wie kann man mit der zweiten Ableitung allein die Frage nach Wendepunkten klären? Was für eine Symmetrie haben die Funktionen? (Vermuten Sie das, und rechnen Sie es auch aus.)

(3) Der Graph von arctan sieht ähnlich aus wie der von g_0 aus der vorigen Aufgabe.
   (a) Transformieren Sie arctan linear derart, dass die Funktion gut mit g_0 vergleichbar wird. (Es sollte dann dieselbe Menge von Werten herauskommen.)
   (b) Finden Sie unter Nutzung der ersten Ableitung einen wesentlichen Unterschied (im Wachtumsverhalten).

(4) Wie verhält sich $f(x) = x\ln(x)$ nahe bei $x = 0$? Welche Punkte sollte man ferner genauer mittels der ersten Ableitung klären? Tun Sie das, nachdem Sie eine grobe Skizze des Graphen gemacht haben, und korrigieren bzw. verfeinern Sie anschließend.

(5) Sei folgende Kurve gegeben: $\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, t^3 - t\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Wie sieht die Bahn aus? Symmetrie? Zu welchen Zeitpunkten wird die $x-$ Achse geschnitten, und in welchen Winkeln geschieht das? (Hinweis: Betrachten Sie die Entwicklung in beiden Komponenten mit t je für sich, setzen Sie dann zusammen.)

(6) Sehen Sie nach, für welchen der folgenden Ausdrücke ein Grenzwert für $x \to 0$ existiert. In welchem Falle sind die de L'Hospitalschen Regeln anwendbar? Aber ist die Anwendung hier praktisch, oder geht es besser?

a. $\dfrac{\cos x}{\sin x}$,

b. $\dfrac{1-\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$.

Übung (14)

(1) Begründen Sie mit dem Satz vom beschränkten Zuwachs, dass für $x \geq 1$ stets gilt: $\ln(1+x) \leq x$.

(2) Wie sieht der Graph von $f(x) = x + \sin x$ aus? Gibt es Extrema? An welchen Stellen im Intervall $[0, 2\pi]$ ist die lokale Steigung der Funktion gleich ihrer mittleren Steigung in diesem Intervall? Was verspricht Ihnen der Mittelwertsatz dazu?

(3) Überzeugen Sie sich durch Handskizze, dass die Gleichung $e^x = -x$ genau eine Lösung hat. Woran liegt es, dass man diese Gleichung nicht einfach rechnerisch exakt lösen kann? Führen Sie mit dem Startwert $x_0 = 0$ zwei Newton-Iterationsschritte durch. Wie gut ist Ihr Resultat? Geben Sie eine obere Schranke für den Fehler Ihrer Nullstellenbestimmung.

(4) Im Punkt $(0, h)$, $h \geq 0$, startet zur Zeit $t = 0$ ein Teilchen mit einem Geschwindigkeitsvektor vom Betrag 1, der einen Winkel $\alpha < \pi/2$ mit der $x-$ Achse bildet und positive $y-$ Komponente besitzt. Der konstante Beschleunigungsvektor sei $(0, -g)$, $g > 0$. Berechnen Sie die Flugweite bis zum Auftreffen auf die $x-$ Achse. Für welchen Winkel α wird die Flugweite im Falle $h = 0$ maximal? Welche Veränderung erwarten Sie für den besten Winkel bei $h > 0$? (Auch den allgemeinen Fall kann man rechnen, das ist aber ziemlich mühsam.)

(5) Geben Sie eine grobe Schranke für $\int_1^e \ln^2(x)dx$ über den Vergleich mit einem Rechteck. Geben Sie auch eine bessere obere Schranke mittels der Flächendeutung.

(6) Welchen Mittelwert hat $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^5$ auf dem Intervall $[-1, 1]$? Beantworten Sie die Frage anschaulich - ohne etwa ein Integral auszurechnen.

(7) Welchen Mittelwert hat e^{-x} im Bereich $[-1, 1]$? Rechnen Sie ihn mittels eines Integrals aus.

Übung (15)

(1) Sie wissen von einer Funktion f: $f(0) = 1$, und $f'(t) = 3t + \sin(2t)$, für alle reellen Werte von t. Was ist dann $f(t)$ für beliebigen Wert t?

(2) Raten Sie, was bei $\int_0^\pi (5 + \cos(2x))\, dx$ herauskommen sollte, und bestätigen Sie das durch Rechnung.

(3) Berechnen Sie $\int_0^\pi \sin(2t)\, dt$, $\int \frac{2}{\frac{1}{3}x-1} dx$, $\int \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$, $\int \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^{30} dx$, $\int \sqrt{x \ln(2) - 1} dx$.

(4) Berechnen Sie $\int x \sin(2x) dx$, $\int x\sqrt{x} dx$ (passen Sie auf, die Ähnlichkeit ist äußerlich.)

(5) Berechnen Sie möglichst praktisch: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) dx$. Wie bekommt man unter Verwendung des Resultates schnell $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x) dx$?

(6) Berechnen Sie $\int x^2\sqrt{1 - x^3} dx$, $\int \left(1 + \tan^2(x)\right) \tan(x) dx$. (Erinnerung: Was ist die Ableitung von tan?)

(7) Berechnen Sie $\int dx \ln\left(\sqrt[4]{x}\right)$, $\int \frac{dx}{2+3x^2}$. (Umformung!)

(8) Berechnen Sie $\int dx \frac{\sqrt{1-\ln x}}{x}$, $\int x \ln\left(1 - x^2\right) dx$. (Bekannte Stammfunktion zu ln nutzen!)

(9) Was ist $\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx$ bei irgendeiner stetigen Funktion f?

(10) Rechnen Sie das Integral $\int_0^{0.3} e^{-x^2} dx$ *numerisch (anders geht es nicht bei dieser Funktion)* unter Verwendung der Streifenbreite 0.1 aus, wobei Sie einmal eine Untersumme, einmal eine Obersumme bilden. Wie groß ist der Fehler also höchstens?