

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

- Berechnen Sie zu $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ und $\vec{b} = (2, 2, -1)$, $\vec{c} = (-1, 3, -1)$: $|\frac{1}{3}\vec{a}|$, $\frac{1}{4}\vec{a}(-2\vec{b})$, $\vec{b}(\vec{a} \times \vec{c})$, $-\vec{a} \cdot (4\vec{b} \times (-2)\vec{c})$. Rechnen Sie möglichst praktisch.
- Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a) (Unbestimmte x, y, z, u - was für eine Gestalt der Lösungsmenge ist vorab zu erwarten?)

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - u &= 1 \\ 3x + 2y - 2z + 3u &= 2 \\ -2x + 2y + 3z - 2u &= 0 \end{aligned}$$

(b) (Unbestimmte x, y, z, a äußerer Parameter - wieder zunächst Ihre Erwartung):

$$\begin{aligned} ax - 2y + 3z &= 0 \\ 3x + ay - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Hinweis: Es macht hier für die Leichtigkeit der Beschreibung deutlich etwas aus, was man zuerst hinauswirft und wie man weitergeht - gehen Sie dem nach, probieren Sie verschiedene Möglichkeiten.)

- Geben Sie eine Formel für den Abstand zwischen parallelen Geraden im \mathbb{R}^2 . Nutzen Sie dafür 'Normalenform im zweidimensionalen Fall'.
- Seien $\vec{x}_P = (1, 2, -2)$, $\vec{x}_Q = (-2, 1, 1)$, $\vec{x}_R = (3, 1, -1)$. Geben Sie für das Dreieck PQR eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P , welche die Höhe auf die Dreiecksseite \overline{QR} bildet, also senkrecht auf dieser Seite steht. Hinweis: Nutzen Sie fleißig das Vektorprodukt.
- Stellen Sie den Vektor $(1, 2, 3)$ dar als Summe eines Vektors parallel zu $\vec{b} = (2, 3, -1)$ und eines Vektors senkrecht zu \vec{b} .
- Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(2, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der Geraden g , $\vec{x}_g(\lambda) = (2, 1, 3) + \lambda(1, 2, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Bestimmen Sie ohne Rechnung den Kern von

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Parameterdarstellung von $\text{Bild}(A)$.

- Ein Punkt dreht sich mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einem Kreise, so dass drei volle Umläufe in einer Zeiteinheit geschafft werden. Der Kreis liegt in der Ebene, hat den Mittelpunkt $(0, 1)$ und den Radius 1. Zu Beginn der Bewegung befinde sich der Punkt in $(0, 0)$, und die Bewegung verlaufe im Uhrzeigersinn. Beschreiben Sie diese Bewegung. Nunmehr stellen Sie sich vor, der Punkt sei stattdessen auf dem Kreis fixiert (mit demselben Startwert), der Kreis rolle aber, ohne zu rutschen, auf der x -Achse nach rechts ab (wiederum drei Umläufe pro Zeiteinheit). Beschreiben Sie diese Bewegung des Punktes.
- Betrachten Sie das Hyperboloid $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ (Oberfläche). Finden Sie eine (möglichst einfach zu beschreibende) Gerade auf dieser Fläche. (Hinweis dazu: Formulieren Sie die geeignete Bedingung für eine allgemein angesetzte Parameterdarstellung einer Geraden in Koordinatenform. Spezialisieren Sie dann frei Wählbares, dass die Sache möglichst einfach wird.) Geben Sie nunmehr eine Parametrisierung der Oberfläche, nachdem Sie diese als durch Rotation Ihrer Geraden um die z -Achse aufgefasst haben.

Übung (9)

1. Seien $\vec{x}_P = (2, 3, 1)$, $\vec{x}_Q = (-3, 1, 1)$, $\vec{x}_R = (1, -1, 2)$. Sie verschieben das Dreieck PQR mit dem Vektor $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Geben Sie das Volumen des mit dieser Verschiebung überstrichenen Körpers (grobe Skizze!) an.
2. Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} - 4\vec{y}) \times (3\vec{y} - 5\vec{x})$.
3. Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Warum ist die folgende Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$, linear, und was sind Kern und Bild? (Beantworten Sie die Frage mit Formelnutzung sowie geometrischer Anschauung.)
4. Rechnen Sie die Determinante folgender Matrix A aus, indem Sie Zeilen- bzw. Spaltenumformungen durchführen und damit Nullen schaffen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Was sind Realteil und Imaginärteil von $2 + 4j$ und von $z + \bar{z}$, wenn $\operatorname{Re}(z) = -5$?
6. Skizzieren Sie folgende komplexen Zahlen in der komplexen Ebene:

$$-2 + 3j, \quad \overline{-2 + 3j}, \quad e^{-j\pi \cdot 5/4}, \quad -2e^{7j\pi/6}.$$

Geben Sie zu den beiden Zahlen in Polarform die exakten (!) kartesischen Formen. Was sind die Beträge der Zahlen (im Kopf!)?

7. Bringen Sie auf kartesische Endform: $z = \frac{3-4j}{2-j}$. Was ist $|z|$? Wie können Sie nun möglichst einfach auf $|\bar{z}|$, $|\frac{1}{z}|$ kommen, ohne diese Zahlen auszurechnen? Rechnen Sie jedoch all diese Zahlen auch aus, in kartesischer Endform, und überprüfen Sie Ihre Resultate für die Beträge.
8. (Wenn noch Zeit ist): Benutzen Sie die senkrechte Projektion und die anschaulichen Idee, dass sich der Flächeninhalt eines von \vec{a}, \vec{b} erzeugten Parallelogramms durch 'Länge der Grundseite mal Länge der Höhe' ergibt. Zeigen Sie damit, dass das Quadrat des Flächeninhaltes gleich $\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ ist. Zeigen Sie damit, dass für zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2)$ des \mathbb{R}^2 der Flächeninhalt des erzeugten Parallelogramms gerade $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ ist.

Übung (10)

1. Geben Sie die Zahl $z_1 = 3\sqrt{3} + 3j$ in exakte Polarform. Wie können Sie dagegen die Zahl $z_2 = -3 + 4j$ nur in *exakter (!)* Polarform schreiben? Woran liegt das?
2. Lösen Sie in \mathbb{C} die folgende Gleichung: $\frac{2+z}{1+jz} = 3 - j$.
3. Was ergibt sich mit

$$\frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}, \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}?$$

4. Sei $z = 2e^{-3j\pi}$. Berechnen Sie von Hand die Zahl z^5 (Endform!).
5. Was für ein Gebilde wird parametrisiert mit $z(t) = te^{jt}$, $t \geq 0$? (Grobe Skizze genügt.)
6. Berechnen Sie die kartesische Endform (R, L, ω sind reell und alle größer als Null) von

$$\frac{1}{\frac{1}{R+j\omega L} + \frac{1}{1/(j\omega C)}}.$$

Überlegen Sie auch, von welcher Schaltung hier der Gesamtwiderstand dargestellt wird. Prüfen Sie Ihr Rechenergebnis auch für die Randfälle $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$. Denken Sie auch an Einheitenkontrolle.

7. Schreiben Sie mit Additionstheorem Gleichungen für $\sin(x+y)$ und $\sin(x-y)$ hin, und gewinnen Sie eine (später nützliche!) Umformung für $\sin(x)\cos(y)$.
8. Geben Sie *alle* Minima der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2 + 2\sin(3x+1)$ (in parametrisierter Form). Was sollte man überlegen, um schnell den Graphen zu zeichnen, unter Markierung der wichtigsten quantitativen Eigenschaften?

Übung (11)

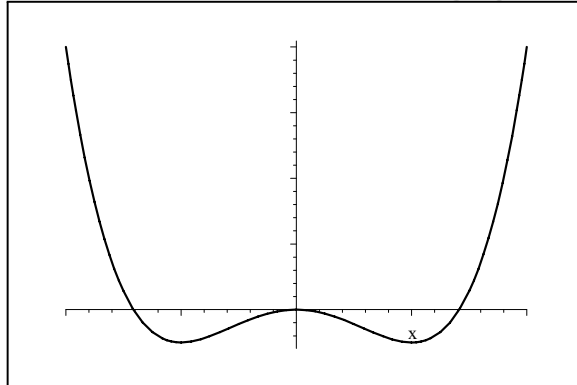
1. Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^3)$, $x^2 \sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien ausdrücklich fest.
2. Sei f eine auf ganz \mathbb{R} definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von f liegt punktsymmetrisch zum Punkt (a, b) '.
3. Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).
4. Eine Größe hat zur Zeit t_0 den Wert 100, und ihr Wert fällt in 3 Zeiteinheiten jeweils auf ein Zehntel. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer geeigneten linearen Transformation der Exponentialfunktion.
5. Eine zeitabhängige Größe kommt mit $t \rightarrow \infty$ sich einer Schwelle M von unten, ohne M zu erreichen. Zur Zeit t_0 hat sie den Wert $M - 100$. Geben Sie eine lineare Transformation der Exponentialfunktion an, welche dies beschreibt. Was bleibt noch frei wählbar? Führen Sie dafür einen äußeren Parameter ein, und formulieren Sie eine Bedingung, welche nur noch eine Lösung zulässt.
6. Lösen Sie die Gleichungen $2^{4x-1} = 10$ und $\log_3(x) = 15$.
7. Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an. Nutzen Sie das elementare Graphenkonstruieren aus bereits vorhandenen Grundgraphen. Vergessen Sie auch nicht, sofort nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen.

(a) $f(x) = (1 - x^2) e^x$

(b) $g(x) = \ln(-2x + 1)$

(c) $h_1(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $h_2(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, $h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

8. Geben Sie einen möglichst einfachen Rechenausdruck an, dessen Graph *qualitativ* so aussieht:



Übung (12)

1. Schreiben Sie die Tangentenerlegung für die Funktion $f(x) = 2(1-x)^3$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.
2. Berechnen Sie folgende Ableitungen:
 - (a) $\frac{d}{dx} \left(e^x - 2\sqrt{x^3} + x^{-\pi-1} + \ln(x) - 3\sin(x) \right)$
 - (b) $\frac{d}{dx} \sin(-3x)$, $\frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx} (-2x - 1)^3$
 - (c) $\frac{d}{dx} x \tan(x)$ (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)
 - (d) $\frac{d}{dx} \frac{\sin(2x)}{1-\sin(x)}$, $\frac{d}{dx} \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$, $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[3]{(-2x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?
 - (e) $\frac{d}{dx} \frac{x^2}{\ln(2)}$, $\frac{d}{dx} (\sqrt{x} \ln(x))$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \rightarrow \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.
 - (f) $\frac{d}{dx} (x - x^3)^4$ (Kettenregel, nicht ausmultiplizieren!)
 - (g) $\frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{2x^2-3}}$
 - (h) $\frac{d}{d\alpha} \frac{x^2}{(x-\alpha)^2(x-3)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)
 - (i) $\frac{d}{dx} \log_a(x)$, $\frac{d}{dx} a^x$ ($a > 0$ in beiden Fällen)
3. Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = x + \ln(x)$ für $x \rightarrow \infty$? Was bedeutet das graphisch?
4. Wie sieht der Graph aus zu $g(x) = \sin(\sin(x))$? (Geben Sie eine grobe Skizze). Wo liegen die Maxima? Überlegen Sie das direkt, verifizieren Sie es auch über die 1. Ableitung.
5. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ für den Ausdruck $f(x) = \frac{1}{1+\sin(2x)}$. Wie groß ist der relative Fehler bei entsprechender Näherung von $f(-0.1)$?
6. Sie suchen eine Funktion der Form $f(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ mit Konstanten α, β . Wie müssen Sie α, β wählen, um die Bedingungen zu erfüllen: $f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$? Wie können Sie nunmehr eine Funktion g (wieder der angegebenen Form) bilden, für die gilt: $g(t_0) = 1$ und $g'(t_0) = 2$?