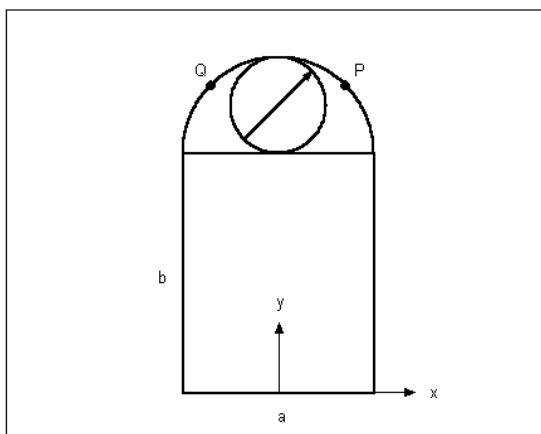


Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Schreiben Sie das Polynom $(x - 1)^5$ geordnet nach Potenzen von x auf. (Binomialkoeffizienten!)
2. Welche Bedingung müssen a, b, c erfüllen, damit die Lösungsmenge der Bestimmungsgleichung $y = a + bx + cx^2$ eine Parabel ergibt, die durch die Punkte $(1, 1)$ und $(2, 1)$ geht? Wie viele freie Parameter braucht man also, um die Menge dieser Parabeln zu beschreiben? Was ist die geometrische Bedeutung davon?
3. Lösen Sie die folgende Bestimmungsgleichung (x Unbest., a äußerer Parameter): $(a + 1)x^2 + ax + 1 = 0$.
4. Wie sieht die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| - |y| \leq 1$ geometrisch aus? (Symmetrien?)
5. Wie sieht die Fläche aus, welche durch die Bestimmungsgleichung $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 1$ im \mathbb{R}^3 bezüglich eines kartesischen Systems beschrieben wird? Schneiden Sie diese Fläche mit der Ebene $z = \frac{1}{4}$. Geben Sie für das entstehende Schnittgebilde eine Parameterdarstellung. Wie sieht das Schnittgebilde genau aus?
6. Seien $\vec{x}_P = (-2, 3, -1)$, $\vec{x}_Q = (4, 2, 2)$. (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h , die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$. (b) Welche Gerade liegt genau in der Mitte zwischen h und der Geraden g , welche durch P und Q geht? (c) Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die zwischen den Geraden g und h liegen, einschließlich dieser Geraden als Ränder. (d) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die Ebene, welche durch $2x + y - z = 1$ gegeben wird?
7. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, und der Kreis ist einem Halbkreis einbeschrieben, der eingezeichnete freie Vektor bilde einen Winkel von 45 Grad mit der x -Achse, die Punkte P, Q haben offensichtliche Lage, a und b bezeichnen Längen. Geben Sie die Koordinatendarstellungen für P, Q und den eingezeichneten Vektor. Parametrisieren Sie den einbeschriebenen Kreis.



8. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmenge(n), ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nicht-lineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g. Beschreiben Sie Gebilde b. in beiden üblichen Formen, auch h. in ordentlicher Form. (Was haben die Ungleichungen jeweils zu bedeuten?)
 - a. Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda^2 - 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (2 + \lambda, 3 - 5\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. c. Im \mathbb{R}^2 : $2x = y^2$. d. Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1) + \mu(3, 4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. e. Im \mathbb{R}^3 : $z^2 = x^2 + y^2 + 1$. f. Im \mathbb{R}^3 : $z^2 = x^2$. g. Im \mathbb{R}^3 : $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda, \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. h. Im \mathbb{R}^3 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2 - \mu, -2\lambda + 3\mu - 1, 3\lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Übung (5)

1. Das Quadrat aller Punkte (α, β) , $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$, wird mit allen Vektoren $\lambda(1, 1)$, $0 \leq \lambda \leq 2$, parallel verschoben. Stellen Sie sich das als dynamischen Vorgang vor. Skizzieren und parametrisieren Sie die dabei insgesamt überdeckte Fläche.
2. Geben Sie für die Ebene E , welche durch die Bestimmungsgleichung $2x - 3y + 4z = 1$ beschrieben ist, eine Parameterdarstellung.
3. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge formal aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{aligned}4x - 2y + 2u - 3v &= 1 \\3y - 2u + v &= 0 \\2x + 3y - u + 2v &= 0\end{aligned}$$

4. Zwei Ebenen im E^3 sei bezüglich eines Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z &= 0\end{aligned}$$

beschrieben. Worin schneiden sich die Ebenen?

5. Schneiden Sie Ebene E , welche durch die Gleichung $2x - y + z = 1$ beschrieben wird, mit der Ebene F , welche parametrisiert ist mit $\vec{x}_F(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(-2, 1, 1) + \mu(-1, 2, 3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vergleichen Sie den Vorgang mit dem bei der vorigen Aufgabe. Warum ist es lästiger, bei derselben geometrischen Aufgabe mit zwei Parameterdarstellungen zu arbeiten?
6. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 3, 4)$. Eine Ebene E sei dadurch gegeben, dass P und Q auf ihr liegen und der Vektor $\vec{a} = (1, 2, -2)$ parallel zu E liegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für E .
7. Ein Fluss konstanter Breite b habe parallele gerade Ufer, und das Wasser fließe darin überall gleichmäßig parallel zum Ufer mit Geschwindigkeit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Ein Schwimmer möchte das jenseitige Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreichen, also den Fluss genau senkrecht zu den Ufern passieren. Welche Eigenschaft muss sein Geschwindigkeitsvektor *relativ zum Wasser* (auch den setzen wir als konstant an) haben, damit das gelingt? Man nehme dazu an, dass der Fluss dem Schwimmer seine Stömungsgeschwindigkeit augenblicklich und stets zusätzlich zu der Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser mitteile. Man fasse das Problem als zweidimensionales koordinatenmäßig, indem man den Ursprung in den Startpunkt des Schwimmers setze und die Achsenrichtungen günstig wähle.

Übung (6)

1. Betrachten Sie folgende Schar von Geraden g_α , $\alpha \in \mathbb{R}$: $\vec{x}_{g_\alpha}(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(\alpha, 1, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Schneiden Sie jede dieser Geraden mit der Ebene $2x - y + z = 1$. Wie sieht die Menge aller gewonnenen Schnittpunkte geometrisch aus?
2. Beschreiben Sie in Worten, wie Sie vorgehen würden, um eine Strecke \overline{PQ} mit vorgegebenen \vec{x}_P, \vec{x}_Q mit einer Ebene zu schneiden. Sagen Sie dazu, welche Fälle auftreten können. Führen Sie das an folgendem Beispiel durch: $\vec{x}_P = (2, 1, 1)$, $\vec{x}_Q = (1, -3, 2)$, E durch die Gleichung $2x - y + z = 1$ gegeben.
3. Seien die Ebenen E und F gegeben durch $\vec{x}_E(\alpha, \beta) = (1, 2, 2) + \alpha(2, 1, 3) + \beta(-1, 4, 2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_F(\lambda, \mu) = \lambda(1, 5, 5) + \mu(3, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (nur unter Verwendung der linearen Operationen), dass diese Ebenen parallel liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge der Punkte zwischen E und F , die Ebenen selbst ausgeschlossen.
4. In den Punkten P, Q, R mit den Ortsvektoren $\vec{x}_P = (1, 2, -3)$, $\vec{x}_Q = (-2, 1, -4)$, $\vec{x}_R = (3, -2, 1)$ liegen Massen $m_P = 1$, $m_Q = 2$, $m_R = 3$. Geben Sie den Schwerpunkt des Systems dieser drei Massenpunkte an.
5. Prüfen Sie (mit den bisher zur Verfügung stehenden Mitteln), ob folgende Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden: $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, 3, 4)$, $\vec{c} = (3, 4, 5)$.
6. Die Punkte A, B, C mögen nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte im Dreieck ABC , unter Verwendung von $\vec{x}_A, \vec{x}_B, \vec{x}_C$. Versuchen Sie, die Sache auf eine beliebige endliche Punktezahl auszudehnen.

Übung (7)

Alle im Zusammenhang von Längen und Winkeln betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen! (Nur aus Platzersparnisgründen werden hier zuweilen Zeilenvektoren geschrieben.)

1. Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 1 \\4x - 3y + 5z &= 2.\end{aligned}$$

Lösen Sie das zugehörige homogene System. Was wissen Sie nunmehr über die Lösungsmenge des vorgegebenen inhomogenen Systems? Tun Sie das noch Benötigte, um diese Lösungsmenge zu bekommen.

2. Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ habe die Lösungsmenge in parametrisierter Form: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit linear unabhängigen \vec{a}, \vec{b} .
 - (a) Welche Lösungsmenge hat dann $A\vec{x} = \vec{0}$?
 - (b) Kann $\vec{c} = \vec{0}$ und $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ sein? Kann $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ sein?
 - (c) Kann es einen Vektor \vec{d} geben, so dass $A\vec{x} = \vec{d}$ die leere Lösungsmenge hat?

3. Warum ist das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

nicht für alle \vec{b} lösbar? Geben Sie einen konkreten Vektor \vec{b}_0 an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}_0$ nicht lösbar ist. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge der Vektoren \vec{b} , für die $A\vec{x} = \vec{b}$ wenigstens eine Lösung hat.

4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 30 Grad im Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$, den Sinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen.
5. Geben Sie die Matrix für eine beliebige Scherung im \mathbb{R}^2 , welche parallel zur y -Achse ausgeführt wird und diese festlässt.
6. Warum ist die Spiegelung an der Ebene $x = 3$ im \mathbb{R}^3 keine lineare Abbildung? Welchen einfachen Rechenausdruck können Sie aber für diese Abbildung angeben? Warum ist dagegen eine Spiegelung an einer beliebigen Ursprungsebene eine lineare Abbildung? (Begründen Sie das abstrakt geometrisch, ohne eine solche Spiegelung allgemein rechnerisch darzustellen.)
7. Berechnen Sie die Länge des Vektors $(2, 3, -1)$. Wie berechnen Sie *praktisch* die Länge von $(-4, -6, 2)$?

Übung (8)

1. Begründen Sie, dass $\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Geben Sie einen Vektor der Länge $\sqrt{5}$ in Richtung des Vektors $(1, 1)$ an.
2. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_Q = (4, 1, -5)$. Was ist der Abstand zwischen P und Q ?
3. Wie können Sie den Ausdruck $\frac{4\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a} - \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$ vereinfachen? Warum kann es keinesfalls sein, dass da $3\vec{b}$ herauskommt?
4. (a) Multiplizieren Sie aus: $(\frac{1}{2}\vec{x} - \frac{2}{3}\vec{y})^2$.
 (b) Vereinfachen Sie: $2(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}) + 2\vec{a}(\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c})$
5. Seien die Vektoren \vec{a}_1, \vec{a}_2 senkrecht aufeinander. Zeigen Sie mit kleiner Rechnung, dass dann für beliebigen Vektor \vec{a}_3 der folgende Vektor

$$\vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3\vec{a}_1}{\vec{a}_1^2}\vec{a}_1 - \frac{\vec{a}_3\vec{a}_2}{\vec{a}_2^2}\vec{a}_2$$

senkrecht sowohl auf \vec{a}_1 als auch auf \vec{a}_2 steht. Zusatzfrage: Was kommt heraus, wenn \vec{a}_3 als Linearkombination von \vec{a}_1, \vec{a}_2 darstellbar ist?

6. Welchen Winkel bildet die Gerade g , $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der xy -Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).
7. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $2x - y + 3z = 1$.
 - (a) Wie lauten die Achsenabschnitte dieser Ebene?
 - (b) Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der senkrecht auf E steht.
 - (c) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?
 - (d) Welchen Abstand hat E vom Punkt P , $\vec{x}_P = (2, 3, 4)$?
 - (e) Welchen Abstand hat E von der Ebene F , die durch $-4x + 2y - 6z = 10$ beschrieben ist?
 - (f) Welchen Winkel bildet E mit der xy -Ebene?
 - (g) Wie kann man von einer Geraden g mit Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_Q + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit beliebigem Orts- und Richtungsvektor, feststellen, ob g auf E liegt?
8. Rechnen Sie nach, dass ein Dreieck mit den Eckpunkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ und einem weiteren Eckpunkt auf dem Einheitskreis mit Mittelpunkt im Ursprung stets ein rechtwinkliges Dreieck ist.