Übung (1)

1. Vereinfachen Sie den Rechenausdruck
$$\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$
Welche Werte nimmt der Ausdruck an, wenn man x alle reellen Zahlen durchlaufen lässt?

2. Erweitern Sie den Ausdruck $\frac{1}{2+3\sqrt{x}}$ mit $2-3\sqrt{x}$. Was passiert?

3. Die Gerade g geht durch die Punkte $(-3,1)$ und $(4,-2)$. Beschreiben Sie die Gerade in folgenden beiden Formen: $y=mx+b$, $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Gehen Sie jedoch direkt über die Zwei-Punkte-Form (also nicht: Lineares Gleichungssystem). Was kann man mittels der zweiten Form sofort ablesen?

4. Bringen Sie (im Kopf!) folgende Gleichung auf Normalform (darin sei nur x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $a\left(x^2-2+x\right)-(1-a)\,x=5\left(x-2x^2\right)$. Geben Sie allgemein für a die Lösungsmenge an. (Fallunterscheidung für a, schon für den entstehenden Gleichungstyp!)

5. Bringen Sie die Gleichung $y=5x^2+2x-3$ in die Formen $y=A\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$ sowie $y=B\,(x+c)^2+d$. (Berechnen Sie also A,α,β,B,c,d.)

6. Zwei Parabeln seien beschrieben durch $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ bzw. $y=b_0+b_1x+b_2x^2$, $a_2\neq 0$, $b_2\neq 0$. Unter welcher Bedingung (an die äußeren Parameter) genau sind die Parabeln kongruent? Hinweis: Denken Sie an die Scheitelpunktsform!

7. Das harmonische Mittel zweier Zahlen $a,b>0$ ist die Zahl $\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$, das arithmetische Mittel der Zahlen a,b ist $\frac{a+b}{2}$. Zeigen Sie durch Rechnung, dass beide Mittel nur dann denselben Wert ergeben, wenn $a=b$, und dass sonst stets das arithmetische Mittel größer ist als das harmonische. Überlegen Sie außerdem eine geeignete Verallgemeinerung für das harmonische Mittel von n positiven Zahlen $v_1,...,v_n$, und zeigen Sie, dass man so die Durchschnittsgeschwindigkeit erhält, wenn man n jeweils gleich lange Strecken der Länge s jeweils in den Geschwindigkeiten $v_1,...,v_n$ durchläuft.

8. Untersuchen Sie, unter welcher Bedingung ein Ausdruck $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$ mit ganzen Zahlen $a,b>0$, b kein Quadrat einer natürlichen Zahl, in die Form $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ gebracht werden kann, wieder mit positiven ganzen Zahlen α,β. Hinweise: Was sind bei dieser Aufgabe äußere Parameter, was sind Unbestimmte? Wie lautet die zu erfüllende Gleichung? (Naheliegende Umformung ergibt ein Gleichungssystem für α,β.) Lösen Sie dies Gleichungssystem. Sie sollten aus der Lösung die gesuchte Bedingung ablesen können und insbesondere für das Beispiel $\sqrt{12+2\sqrt{20}}$ eine Darstellung der Form $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ schnell finden können. Sie dürfen benutzen: Wenn a,b und ebenso c,d die oben angegebenen Voraussetzungen erfüllen und $a+2\sqrt{b}=c+2\sqrt{d}$, dann ist $a=c$ und $b=d$. Überlegen Sie aber auch, warum das so ist.

Übung (2)

1. Welche der folgenden Gleichungen ist linear / quadratisch / Polynomgleichung / nichts davon in x? Lösen Sie die betreffenden Gleichungen im linearen und im (wesentlich) quadratischen Fall. Versuchen Sie sich daran, etwas zur Existenz und zur Berechenbarkeit von Lösungen in den anderen Fällen zu sagen. Schreiben Sie im Falle der Polynomgleichung auch die Normalform (unter Nutzung der Binomialkoeffizienten) auf.

$$\begin{aligned} \sqrt{x}\,(1-x)^5 &= x^3, \\ (1-x)^6 &= x\sqrt{a} \\ x\sin(a) - 2 &= (3-x)\cos^2(a) \\ \frac{a+1}{x} + x &= 1 \end{aligned}$$

   Zusatzfragen: Was für eine Gleichung ist die dritte in a / in $\sin(a)$? Was für eine Gleichung ist die vierte in a?

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 &= 1 \end{aligned}$$

   Deuten Sie zuvor die Aufgabe und ihre Lösung geometrisch (Skizze!) Sagen Sie damit voraus, wie viele Lösungen es geben sollte. Erkennen Sie die Symmetrie der geometrischen Situation auch im Gleichungssystem.

3. Schreiben Sie folgende Summe aus: $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k+1}$. Welcher Klasse gehört dieser Ausdruck an?

4. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:

$$\frac{1}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{15}}{14}$$

5. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 7 Leute aus 11 Leuten auszuwählen? (Kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie das Resultat im Kopf errechnen können.)

6. Den absoluten Fehler einer Messung einer Größe gibt man so an: Wahrer Wert der Größe minus Messwert. Der relative Fehler ist der Quotient: Absoluter Fehler geteilt durch wahren Wert (der dafür nicht Null sein darf). Bezeichnen wir den relativen Fehler mit r_w. In Ermangelung des wahren Wertes bildet man auch den relativen Fehler r_m, worin der Messwert anstelle des wahren Wertes in den Nenner gesetzt ist.

   (a) Warum bleibt bei Einheitenwechsel der relative Fehler unverändert? (Das sollten Sie verbal ordentlich begründen können.)

   (b) Geben Sie eine Formel für $r_w - r_m$, welche diese Größe in absolutem Fehler, wahrem Wert und Messwert ausdrückt.

7. Bilden Sie mittels einer linearen Funktion (deren Rechenausdruck ist zu bestimmen) die geordneten Messwerte $x_1 < x_2 < ... < x_n$ in das Intervall $[0,1]$ ab, so dass x_1 auf Null und x_n auf 1 abgebildet wird. Können Sie sich einen praktischen Nutzen eines solchen Vorgehens vorstellen?

8. Zeigen Sie, dass eine lineare Funktion $f(x) = mx + b$ folgende Eigenschaft besitzt: Der Funktionswert des arithmetischen Mittels zweier $x-$ Werte x_0, x_1 ist stets gleich dem arithmetischen Mittel der Funktionswerte bei x_0 und x_1. Untersuchen Sie auch (graphisch und rechnerisch), wie die Beziehung zwischen Funktionswert des Mittels und Mittel der Funktionswerte für die Quadratfunktion $g(x) = x^2$ aussieht.

9. Wie lang ist der Breitenkreis von 50 Grad nördlicher Breite auf der Erde? (Hinweis: Der Erdradius ist etwa 6378 km, nehmen Sie die Erde vereinfachend als exakte Kugel mit diesem Radius.)

Übung (3)

1. Ein Polynom in x vom Grad n wird mit einem Polynom vom Grad m multipliziert. Was für ein Ausdruck kommt dabei heraus? Wie rechnet man den Koeffizienten von x^3 im Resultat aus? Verallgemeinerung?

2. Was ergibt die Anwendung der allgemeinen binomischen Formel auf $(1+1)^n$? Wie kann man diese Aussage kombinatorisch deuten und auch auf diesem Wege einsehen?

3. Was ergibt die Anwendung des Distributivgesetzes im Falle $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$? Wie können Sie das Resultat als Doppelsumme schreiben?

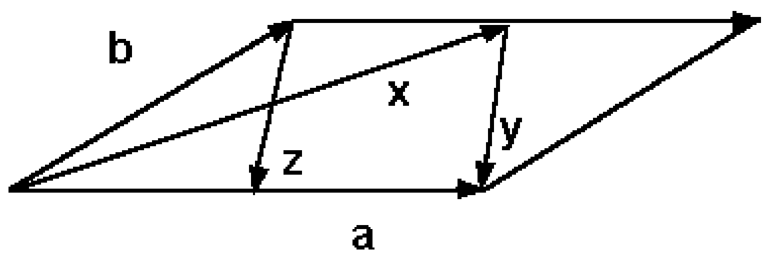
4. Was bedeutet in der Ebene die Beziehung $y > 2x + 3$? Welche Punktmenge wird dadurch beschrieben? Beschreiben Sie aufgrund dessen auch die Menge der Punkte im Dreieck mit den Eckpunkten (in Koordinatendarstellung) $(0,1)$, $(2,-3)$, $(3,4)$ durch ein System von Ungleichungen.

5. Skizzieren Sie die jeweiligen Lösungsmengen im $\mathbb{R}^2$ der folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 1 \\ \max(|x|, |y|) &\leq 1 \end{aligned}$$

   Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit die Lösungsmenge von $\max(|x|, |y|) \leq a$ der Lösungsmenge von $|x| + |y| \leq 1$ genau einbeschrieben wird?

6. In der folgenden Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben und die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ gesucht, also letztere in $\vec{a}, \vec{b}$ auszudrücken durch die geometrischen Vektorraumoperationen. Zu verstehen: Die ganze Figur ist ein Parallelogramm, $\vec{x}$ und $\vec{z}$ (genauer: deren hier gezeichnete Repräsentanten) stoßen auf den jeweiligen Seitenmittelpunkt.



7. Skizzieren Sie in der Ebene exemplarisch den geometrischen Gehalt der Aussage $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$. An welchen geometrischen Satz erinnert das?

8. Wie viele Zahlenangaben benötigen Sie jeweils, um zu beschreiben: Eine Richtung in der Ebene / eine Richtung im dreidimensionalen Raum / ein Dreieck in der Ebene mit genauer Lage / ein Dreieck in der Ebene als Figur mit genauen Maßen, abgesehen von der Lage in der Ebene / ein Dreieck als Form (abgesehen von seiner Größe) // eine Parabel mit genauer Lage im dreidimensionalen Raum?

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein, mit vollem Quader.

2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$.Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der $x-$ Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der $z-$ Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der $y-$ Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.

   (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?

   (b) die obere Würfelseitenfläche,

   (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,

   (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.

   (e) Versuchen Sie, alle Würfelseitenflächen auf einmal zu beschreiben. Verwenden Sie dazu die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Hinweis: Bilden Sie Summen dieser Vektoren mit geeigneten Vorfaktoren (Koeffizienten), und vergessen Sie die Lage des Würfelmittelpunktes nicht.

3. Seien die Punkte P, Q, R durch folgende Koordinatendarstellungen ihrer Ortsvektoren gegeben: $\vec{x}_P^K = (3, -4)$, $\vec{x}_Q^K = (2, 3)$, $\vec{x}_R^K = (4, 5)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch P geht und die Strecke $\overline{QR}$ halbiert.

4. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

5. Was für ein Gebilde wird mit $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ (t-1)^2 + 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, parametrisiert? Nunmehr betrachten wir für eine feste Zahl $\lambda \neq 0$ die Parametrisierung $\vec{y}(t) = \lambda \vec{x}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Wir strecken also alle Ortsvektoren mit λ. Was für ein Gebilde entsteht? (Hinweis: Stellen Sie beide Gebilde als Funktionsgraphen dar, geben Sie die zugehörigen Funktionen an. Deuten Sie geometrisch genau, was die Streckung mit λ bewirkt.)

6. Sie projizieren den Kreis, parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$, zentral auf die Ebene $x = 2$, indem Sie jeweils einen Sehstrahl vom Augenpunkt $(5, 0, 1)$ zu einem Kreispunkt gehen lassen und diesen Sehstrahl mit der Ebene $x = 2$ schneiden. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Punktmenge, welche diese Projektion ergibt.