Übungen (15)

(1) (a) Erklären Sie geometrisch, warum $\frac{d}{dx}\ln(3x)$ dasselbe ist wie $\frac{d}{dx}\ln(x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(x+\cos(x))^7$, $\frac{d}{dx}\frac{x}{\ln(x)}$. Diskutieren Sie auch die Funktion $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$. Geben Sie insbesondere an, was Sie mit der ersten Ableitung gewinnen können.

(2) Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int \cos\left(\frac{x}{3}+\varphi\right)dx$, $\int 2\ln(3t-1)\,dt$ (benutzen Sie die bekannte Stammfunktion $f(x)=x\ln(x)-x$ für ln)

(b) $\int \frac{x}{(2x+1)(x+2)}dx$, $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$, $\int \frac{x}{1+x^2}dx$, $\int \frac{x}{(x^2-1)^8}dx$

(c) $\int \frac{1}{e^x(e^x-1)}dx$ (führen Sie die Substitution $x=\ln(t)$ durch),

(d) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.

(3) Einige Anwendungen von Integralen:

(a) Eine Funktion f habe die Ableitung $f'(x)=2x^2+3e^{2x}$. Ferner sei $f(1)=1$. Was ist $f(x)$ für beliebigen Wert x?

(b) Auf der Strecke $[0,2]$ sei folgende Temperaturverteilung gegeben: An der Stelle x herrsche die Temperatur $T(x)=\cos^2(x)$. Welche ist die mittlere Temperatur auf der Strecke?

(c) Stellen Sie sich vor, dass auf der $x-$ Achse im Bereich $[0,2]$ an jeder Stelle x eine Kraft senkrecht in Richtung des Vektors $(0,-1)$ wirke, deren Betrag von $f(x)=x^2$ gegeben wird. An welchem Punkt muss man die Strecke $[0,2]$ unterstützen, damit Gleichgewicht herrscht?

(d) Stellen Sie sich einen dünnen Draht der Länge l auf dem Intervall $[0,2]$ vor, der an der Stelle x Massendichte $m(x)=4-x^2$ (Einheit: Gramm pro Längeneinheit) hat. Welche Masse hat der gesamte Draht?

(e) Welche Bogenlänge hat die Parabel $y=x^2$ auf dem Stück $x\in[0,3]$? Welches Volumen hat der Rotationskörper, der entsteht, wenn man dies Parabelstück um die $x-$ Achse rotieren lässt?

(4) (Wenn noch Zeit ist: Berechnen Sie $\int \frac{1}{(x-2)(x+3)(x^2+1)}dx$. Bestimmen Sie für die benötigte Partialbruchzerlegung alle Koeffizienten direkt, bei denen das möglich ist, und für den Rest stellen Sie ein möglichst einfaches lineares Gleichungssystem auf, das Sie lösen.)

(5) (Für freie Kapazitäten:) Seien f,g stetige Funktionen auf $[a,b]$, ferner $f(x)\le g(x)$ für alle $x\in[a,b]$. Folgern Sie unter Nutzung des Satzes vom beschränkten Zuwachs, dass dann $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$ gilt.

Abschließende Übungen

(1) Berechnen Sie (möglichst praktisch) zu $\vec{a} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = (3,-2,2)$ und $\vec{c} = (-2,1,1)$: $\left|-4(\vec{b}-\vec{a})\right|$, $(-3\vec{a})\left(5\vec{b}\right)$, $\vec{c}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\vec{a}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2$, $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2$ und $\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$.

(2) Vereinfachen Sie (allgemeingültig für beliebige $\vec{x}, \vec{y}$): $(\vec{x}-\vec{y})(-3\vec{y}-4\vec{x})$, $(\vec{x}-\vec{y})\times(2\vec{y}-3\vec{x})$.

(3) Welche Vektoren ergeben den Vektor $(2,4,4)$, wenn man sie senkrecht auf $(1,2,2)$ projiziert? (Geometrische Deutung und Gleichungsbeschreibung in geometrischer und in Komponentenform.)

(4) Sei E sie Ebene, welche durch die Gleichung $2x-3y+z=1$ beschrieben wird. Die Ebene F gehe aus E dadurch hervor, dass E mit dem Vektor $(3,-4,5)$ parallel verschoben wird. Finden Sie direkt eine Normalenform für F. Welchen Abstand hat F vom Koordinatenursprung?

(5) (a) Stellen Sie fest, dass die folgenden Geraden g und h einander nicht schneiden: $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,1,-1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\vec{x}_h(\alpha) = (1,2,2)+\alpha(3,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

(b) Welchen Abstand haben die Geraden voneinander? (Berechnen Sie diesen Abstand als Länge eines auf beiden Geraden senkrecht stehenden Vektors, der einen Punkt von g mit einem Punkt von h derart verbindet.)

(c) Welchen Winkel bilden beide Geraden miteinander?

(d) Welchen Abstand hat der Punkt $(1,2,2)$ von der Geraden g? Berechnen Sie ihn einmal über Vektorrechnung mittels einer senkrechten Projektion, einmal über Extremwertbehandlung im Sinne der Infinitesimalrechnung. (Hinweis: Dabei ist es nützlich, das Quadrat des Abstandes zu betrachten statt den Abstand selbst - warum?)

(6) Geben Sie die Lösungsmenge zu folgendem linearen Gleichungssystem an:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch den Kern der Matrix (als linearer Abbildung) sowie Dimension von Kern und Bild an, dazu eine Basis für das Bild. Welche Beziehung muss zwischen a,b,c bestehen, damit der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ im Bild liegt?

(7) Geben Sie eine Parameterdarstellung für den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$. Geben Sie nunmehr auch eine solche Darstellung für die Kurve, die sich daraus durch Drehung um den Ursprung mit Winkel $\pi/3$ entgegen dem Uhrzeigersinn ergibt.

(8) Sie haben eine Funktion f, und Sie wollen eine Funktion g produzieren, deren Graph durch Streckung mit Faktor 2 längs der $x-$ Achse und Stauchung mit Faktor 2 längs der $y-$ Achse entsteht. Geben Sie unter Benutzung des Ausdrucks $f(x)$ einen Rechenausdruck für g an.

(9) Skizzieren Sie grob den Graphen zu $f(x) = \sqrt[3]{1+(x-3)^2}$, in deren maximalem reellen Definitionsbereich. Versuchen Sie das direkt. Welche (Nichtstandard-) Symmetrie hat der Graph? Bestätigen Sie auch wesentliche Eigenschaften, die man direkt sehen konnte, mittels der ersten Ableitung.

(10) Wie sieht (ganz grob) der Graph aus zur Funktion $f(x) = e^{-x^2}\sin(x)$? Symmetrie? Nullstellen? Sagen Sie etwas Qualitatives zur Existenz von Extrema, und geben Sie die (nicht rechnerisch lösbare!) Gleichung an, welche alle Extrema erfüllen müssen. Sehen Sie intuitiv ein, wie die Näherung erster Ordnung für kleine $|x|$ aussehen sollte, und bestätigen Sie das über die 1. Ableitung auch rechnerisch.

(11) Geben Sie einen allgemeinen Rechenausdruck für alle Funktionen an, deren zweite Ableitung überall konstant Null ist.

(12) Sie messen mit einem Fehler höchstens vom Betrag $\Delta t > 0$ eine Zeit t mit Ergebnis t_0, dann bestimmen Sie die Größe $s = \frac{1}{2}gt^2$ ($g > 0$ Konstante) mit Ihrem Messresultat t_0. Welchen linearisierten Höchstfehler für s ergibt das?

(13) Wie lautet die Näherung 1. Ordnung von $\frac{x^3-1}{x^3+1}$ für x in enger Umgebung der Zahl 1?

(14) Sei $\vec{x}(t) = (2,3,1) + t(3,2,-2) + \frac{1}{1+t^2}(1,-2,1)$, $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahn dieser Kurve im Punkt $\vec{x}(1)$. Zusatzfrage: In welcher Ebene liegt die Bahn der Kurve? Geben Sie dafür eine Parameterdarstellung.

(15) Berechnen Sie in kartesischer Endform: $z = \frac{1-3j}{2+\sqrt{2}j}$. Was sind $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$?

(16) Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Gleichung $z(1-\overline{z}) = \frac{1}{2}j$? (Hinweis: Setzen Sie z in kartesischen Koordinaten an, und führen Sie Koeffizientenvergleich durch.)

(17) Berechnen Sie in kartesischer Endform: $z = \frac{1}{je^{j\pi/3}+1}$.