Aufgaben zum Wochenende (4)

(1) (a) Sei die Ebene E parametrisiert mit $\vec{x}_E(\lambda,\mu) = (1,2,-1) + \lambda(2,-1,2) + \mu(3,2,1)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Seien $\vec{x}_P = (0,-1,0)$, $\vec{x}_Q = (-2,0,-2)$.

(i) Geben Sie eine Normalenform für E, und zeigen Sie, dass P, Q auf E liegen.

(ii) Geben Sie eine Normalenform für die Ebene F, welche senkrecht auf E steht und durch P und Q geht.

(iii) In welchem Winkel steht F zur $xz-$ Ebene?

(iv) Sei $\vec{x}_S = (1,1,2)$. Welcher Punkt entsteht, wenn man S auf E senkrecht projiziert?

(v) Schneiden Sie die Ebene E mit der Ebene, welche durch die Gleichung $2x + y - 3z = 0$ beschrieben ist.

(b) Die Vektoren $\vec{a} = (1,2,-1)$, $\vec{b} = (2,1,3)$, $\vec{c} = (3,1,2)$ bilden ein Koordinatensystem für den $\mathbb{R}^3$ - warum ist das so? Geben Sie die Koordinatendarstellung des Vektors $(2,1,1)$ in diesem System an.

(2) (a) Lösen Sie folgende Gleichung in $\mathbb{C}$: $\frac{2-3j}{z+1} = 1 + j$.

(b) Rechnen Sie folgende komplexe Zahl in kartesischer Endform aus: $\frac{2-j}{e^{2-j\pi/2}}$.

(c) Was ergibt j^n für natürliche Zahlen n? Formulieren Sie allgemein das Resultat mit einer geeigneten Fallunterscheidung.

(3) (a) Wie lautet die Näherung 1. Ordnung von $\sqrt{x}$ für x in enger Umgebung der Zahl 1?

(b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+|x|^3}}$ auf $\mathbb{R}$.

(i) Skizzieren Sie grob den Graphen, und formulieren Sie dabei verbal die wesentlichen Eigenschaften, und begründen Sie kurz diese Eigenschaften.

(ii) Berechnen Sie die erste Ableitung. Hinweis: Es genügt, wenn Sie das tun für den Bereich $x \geq 0$. Gelingt Ihnen auch eine für alle Werte von x gültige Formulierung?

(iii) Was sagt Ihnen die Ableitung über Extrema von f, über Monotonie und über das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

(c) Es sei die folgende Kurve gegeben: $\vec{x}(t) = \left(\sin\left(3t^2\right), \cos(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Geraden, welche die Bahn der Kurve im beliebigen Punkt $\vec{x}(t)$ berührt. Welche Rolle hat t bei dieser Aufgabe?

(d) Geben Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$ auf dem Intervall $[0,2]$ an.

(e) Berechnen Sie $\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - 1\right)^5 dx$.

(f) Berechnen Sie $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$.

(g) Berechnen Sie $\int x^3 \sqrt[3]{1-3x^4} dx = -\frac{1}{16}\sqrt[3]{(1-3x^4)^4}$.

Hier sind noch ein paar weitere Übungsaufgaben:

(1) Geben Sie die Näherung erster Ordnung von $f(x) = \frac{1+\sin(x)}{1+\tan^2(x)}$ für kleine Beträge von x.

(2) Welchen Grenzwert hat $\frac{x}{1-e^x}$ für $x \to 0$? Skizzieren Sie den Graphen der entsprechenden Funktion, bei der die Lücke durch diesen Grenzwert geschlossen ist.

(3) Sei folgendes Skalarfeld gegeben: $s(x,y) = 1 + x^2 + xy$. Wie sieht die Niveaukurve zum Feldwert $c = 3$ bei diesem Skalarfeld aus? Prüfen Sie, dass der Punkt $(1,1)$ auf dieser Niveaukurve liegt. Geben Sie die Näherung erster Ordnung für $s(1+\Delta x, 1+\Delta y)$ an. Beschreiben Sie die Gerade, welche die erwähnte Niveaukurve im Punkt $(1,1)$ senkrecht durchstößt.