Übung (12)

(1) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x^7}{1-x^3}$ im maximalen reellen Definitionsbereich. Insbesondere sollten Sie ohne Rechnung (und ohne Taschenrechnerwerte!) zu einer sicheren groben Skizze kommen (lassen Sie sich vom Fragenkatalog leiten). Berechnen Sie nunmehr die erste Ableitung, und klären Sie mit deren Hilfe die Extremwertfrage auch quantitativ. Betrachten Sie nunmehr die Funktion $g(x) = \frac{x^7+1}{1-x^3}$. Welcher Teil desselben Programms funktioniert, welcher nicht? Gibt es einen qualitativen Unterschied der Graphen von f und g?

(2) Welche Eigenschaften der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}e^{-x}$? Fertigen Sie eine grobe Skizze an, klären Sie die Extremwertfrage quantitativ mittels der ersten Ableitung. Welche Besonderheit des Graphen zeigt die erste Ableitung noch? Beantworten Sie qualitativ und auch mittels der zweiten Ableitung quantitativ die Frage nach Wendepunkten.

(3) Diskutieren Sie: $h(x) = \sqrt[3]{\arctan(x)}$ - maximaler reeller Definitionsbereich? Symmetrie? Was ist qualitativ anders als bei arctan, und was sagt die erste Ableitung? Wo existiert sie nicht, und was ist dort der Fall?

(4) Wie sehen für beliebige natürliche Zahl $n \geq 1$ die Graphen der Funktionen $f_n(x) = x^n e^{-x}$ aus? Sie sollten insbesondere allgemein quantitativ die Extremwertfrage mittels der ersten Ableitung klären.

(5) Leiten Sie die komplexwertige Funktion $f(t) = e^{j\omega t}$ naiv ab, und stellen Sie fest, dass die komponentenweise Ableitung (bei Auffassung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$) gerade dies Resultat hat.

(6) Sei $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 - \sqrt{1-x^2} \text{ für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Wie sieht der Graph aus? Rechnen Sie nunmehr (getrennt für $x < 0$ und den andern Fall $x \geq 0$) die erste und die zweite Ableitung aus. Ist f in $x = 0$ einmal stetig differenzierbar? Ist f in $x = 0$ zwei mal differenzierbar? (Sie sehen hier, warum man Schienen so nicht verlegt, weil das für die Insassen fürchterlich wäre - da hat man zweimalige stetige Differenzierbarkeit nötig.)

(7) Leiten Sie die Umkehrfunktion arcsinh zur Funktion $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach der Regel für Umkehrfunktionen ab. Rechnen Sie zuvor aus, dass mit $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gilt: $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$, und nutzen Sie das.

(8) Geben Sie folgende Grenzwerte an - in welchen Fällen sind die de L'Hospitalsche Regeln anwendbar?
   (a) $\lim_{x \to 0} \frac{\arctan^2(x)}{x^2}$
   (b) $\lim_{x \to 0} \frac{1+x^2}{x}$
   (c) $\lim_{x \to 0} (x \ln(x))$. (Überlegen Sie, wie man hier zu einem Quotienten kommen kann.)

Übung (13)

(1) Hier noch ein paar einfache Übungen zum Ausrechnen und Nutzen von Ableitungen:
   (a) $\frac{d}{dt}\tan(\omega t+\varphi)$ $(\omega>0)$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{(1+x^2)^5}$, $\frac{d}{dx}\left(x^2\sin(x)\right)$, $\frac{d}{dx}\frac{1-e^{-x}}{x}$.
   (b) Berechnen Sie die Extrema von $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$. (Können Sie sich den Graphen gleich so vorstellen, dass Sie vorab wissen, wie viele und was für Extrema es geben muss?)

(2) Stellen Sie in zweidimensionalen die Flugparabel für den Fall des Beschleunigungsvektors $(0,-g)$, $g>0$, Anfangsort $(0,0)$ zur Zeit $t=0$ und Anfangsgeschwindigkeit zur selben Zeit vom *Betrage* $k>0$ auf, für einen beliebigen Abwurfwinkel. Für welchen Winkel erhalten Sie (bei ebenem Boden) maximale Flugweite? (Bedenken Sie aber, dass hier keinerlei Reibungswiderstand berücksichtigt ist.)

(3) Wie lautet die Näherung 1. Ordnung von $\sqrt[5]{32.1}$? (Was sollten Sie als x_0 nehmen?) Was liefert das Newtonverfahren, wenn man mit $x_0=2$ für die Lösung der Gleichung beginnt, nach zwei Iterationsschritten? Wie sehen die relativen Fehler aus?

(4) Diskutieren Sie die Funktion $f(x)=\frac{x}{1-\ln(x)}$ in deren maximalem reellen Definitionsbereich.

(5) Welche mittlere Steigung hat die Funktion $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$ auf dem Intervall $[0,1]$? An welcher Stelle in diesem Intervall (gibt es nur eine solche?) ist die lokale Steigung gleich der mittleren?

(6) Es sei f eine streng monoton fallende Funktion und g eine streng monoton steigende (jeweils überall). Welche Monotonieeigenschaft hat dann $g\circ f$? Argumentieren Sie mit den Definitionen der Monotonieeigenschaften. Wenn Sie nun zusätzlich f und g als überall differenzierbar und $f'<0$ und $g'>0$ annehmen: Wie können Sie das Resultat dann mit der Ableitung zeigen?

(7) Zeigen Sie mittels der Kettenregel, dass die Ableitung einer geraden Funktion stets ungerade ist. Hinweis: Schreiben Sie die definitorisch gültige Gleichung auf, und differenzieren Sie beide Seiten.

(8) Zeigen Sie mit dem Satz vom endlichen Zuwachs, dass $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\leq\frac{x^2}{2}$ für $x\geq 0$. Zusatzfragen: Warum ist die Ungleichung selbstverständlich für große Beträge von x, nicht aber für kleine? Verifizieren Sie auch (das geht ganz schnell!), dass tatsächlich $\frac{x^2}{2}$ sogar die Näherung 3. Ordnung von $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$ für kleine Beträge von x ist.

Übung (14)

(1) Welchen Wert hat $\int_{-1}^{2}(-3)dx$ unmittelbar anhand der Deutung: Flächeninhalt mit Orientierungsvorzeichen?

(2) Die Funktion f habe auf $[0,2]$ den Mittelwert 3. Was ist dann $\int_0^2 f(x)dx$?

(3) Geben Sie jeweils untere und obere Schranken für $\int_0^1 \sqrt{\tan(x)}dx$ anhand der Flächendeutung, einmal mit Rechtecken, einmal verfeinert mit Trapezen.

(4) Welchen Mittelwert hat $\tan^3$ auf dem Intervall $[-1,1]$? Beantworten Sie die Frage anschaulich - ohne etwa ein Integral auszurechnen.

(5) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{1+2x}$ im Bereich $[1;3]$? Rechnen Sie ihn mittels eines Integrals aus.

(6) Berechnen Sie möglichst praktisch: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos(x)\,dx$. Geben Sie auch zuvor für den Wert dieses Integrals eine grobe untere und obere Schranke an.

(7) Berechnen Sie $\int_0^\pi \cos(3t)\,dt$, $\int \frac{2}{x^2+1}dx$, $\int \frac{\sqrt{x^4}+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, $\int (1-3x)^{90}\,dx$, $\int \sqrt{2x-1}dx$.

(8) Berechnen Sie über geschicktes Umformen mittels $1/\alpha-$ Regel die folgenden Integrale:
   (a) $\int dx \ln\left(\sqrt[3]{x+1}\right)$, $\int dx \sin^2(x)$, $\int \frac{1}{2+3x^2}dx$.
   (b) Berechnen Sie durch Umkehrung der Kettenregel, aber bei Schwierigkeiten auch mittels des Substitutionsschemas folgende Integrale: $\int \cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}dx$, $\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x}dx$.

(9) Berechnen Sie $\int xe^{-2x}dx$ über partielle Integration.

(10) Führen Sie mit dem Integral $\int \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ durch, und rechnen Sie es damit aus.

(11) Sie starten zur Zeit $t=0$ im Punkt $(2,0)$ eine Bewegung, die Anfangsgeschwindigkeit ist $(1,0)$, die Beschleunigung zur Zeit t sei $\left(6t,t^2\right)$. Geben Sie die Geschwindigkeit und den Ort als (vektorwertige!) Funktionen $\vec{v}$ und $\vec{s}$ der Zeit. Nutzen Sie bestimmte Integrale. Stellen Sie sich auch grob die Bahn der Kurve $\vec{s}(t)$ vor.