Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie zu $\vec{a} = (-1, 4, 2)$ und $\vec{b} = (3, 2, -1)$, $\vec{c} = (-1, 3, -1)$: $|-2\vec{a}|$, $\frac{1}{3}\vec{a}\left(-4\vec{b}\right)$, $\vec{c}\,(\vec{a} \times \vec{c})$, $\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, $-2\vec{b} \cdot (3\vec{a} \times (-2)\,\vec{c})$. Rechnen Sie möglichst praktisch.

2. Rechnen Sie nach, dass folgende Gleichung allgemeingültig ist: $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a}\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a}\vec{b}\right)\vec{c}$. Überlegen Sie zuvor geometrisch, dass ein Vektor in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene herauskommen muss. Hinweis: Sie können die Sache brutal mit Koordinaten durchrechnen, aber auch eine Überlegung anstellen, dass es genügt, die Aussage zu haben nur für den Fall, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ unter den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sind.

3. Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme:

   (a) (Unbestimmte x, y, z, u - was für eine Gestalt der Lösungsmenge ist vorab zu erwarten? Wie viele Eliminationsschritte werden Sie benötigen?)

   $$\begin{aligned} 2x - 3y + z - u &= 1 \\ 3x + 2y - 2z \phantom{{}-2u} &= 2 \\ -2x + 2y + 3z - 2u &= 0 \end{aligned}$$

   (b) (Unbestimmte x, y, z, a äußerer Parameter - wieder zunächst Ihre Erwartung):

   $$\begin{aligned} (1 + a)\,x - 2y + 3z &= 0 \\ 3x + ay - 2z &= 1 \end{aligned}$$

   Hinweis: Es macht hier für die Leichtigkeit der Beschreibung deutlich etwas aus, was man zuerst hinauswirft und wie man weitergeht - gehen Sie dem nach, probieren Sie verschiedene Möglichkeiten.)

4. Bestimmen Sie den Kern von

   $$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie eine Parameterdarstellung von $Bild\,(A)$.

5. Sei E die Ebene $2x + y + z = 1$. Sei $g > 0$. Zerlegen Sie den Vektor $(0, 0, -g)$ als Summe eines Vektors parallel zu E und eines Vektors senkrecht zu E. In welcher Richtung würde also ein Körper auf dieser 'schiefen Ebene' bei Vorliegen nur des angebgebenen Schwerkraftvektors rutschen?

6. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1, 2, 3) + \lambda(2, 3, -1) + \mu(2, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g\,(\lambda) = (2, 1, 3) + \lambda\,(1, 2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, 3)$, $\vec{x}_Q = (-2, 2, 1)$, $\vec{x}_R = (3, 1, -1)$. Welchen Endpunkt außer P hat die Höhe auf der Dreieckseite $\overline{QR}$? Wie lang ist also die Höhe dieses Dreiecks? (Beachten Sie: Der andere Endpunkt muss nicht auf dieser Dreieckseite $\overline{QR}$ liegen, wohl aber auf der Geraden durch diese Strecke. Die Höhe durch P verbindet definitionsgemäß P auf kürzestem Wege mit dieser Geraden, steht also senkrecht auf ihr.)

8. Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm genau dann eine Raute ist (d.h. vier gleich lange Seiten hat), wenn die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

9. Ein Stab der Höhe $h > 0$ bewegt sich gleitend auf der $xy-$ Ebene, dabei stehe er stets senkrecht auf dieser Ebene. Auf der $xy-$ Ebene beschreibe der Fußpunkt dabei eine Kreisbahn mit Radius $r > 0$ um den Mittelpunkt $(1, 1, 0)$. Im Punkt $(0, 0, 2h)$ befinde sich eine Lichtquelle. Was ist die Bahn des Schattens, den der Kopfpunkt des Stabes auf die $xy-$ Ebene wirft?

Übung (9)

1. Seien $\vec{x}_P = (2,3,1)$, $\vec{x}_Q = (-3,1,1)$, $\vec{x}_R = (1,-1,2)$. Sie verschieben das Dreieck PQR mit dem Vektor $\vec{a} = (1,2,-1)$. Geben Sie das Volumen des mit dieser Verschiebung überstrichenen Körpers (grobe Skizze!) an.

2. Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} - 4\vec{y}) \times (3\vec{y} - 5\vec{x})$.

3. Beweisen Sie den Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$, wobei a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind und die Winkel mit entsprechenden griechischen Buchstaben den Seiten jeweils gegenüber liegen (übliche schulmäßige Bezeichnung). Hinweis: Es ist zweckmäßig, die Quadrate der Ausdrücke zu betrachten - Sie wissen, wie man Cosinus vektoriell ausdrückt.

4. Rechnen Sie die Determinante folgender Matrix A aus, indem Sie Zeilen- bzw. Spaltenumformungen durchführen und damit Nullen schaffen:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Was sind Realteil und Imaginärteil von $3 - 4j$?

6. Drücken Sie $z + \overline{z}$ sowie $z - \overline{z}$ aus durch $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$. Skizzieren Sie die Sache auch.

7. Skizzieren Sie folgende komplexen Zahlen in der komplexen Ebene:
$$-1 + 3j,\ \overline{-1 + 3j},\ e^{-j\pi\cdot 5/4},\ -2e^{7j\pi/6}.$$
Geben Sie zu den beiden Zahlen in Polarform die exakten (!) kartesischen Formen. Was sind die Beträge der Zahlen (im Kopf!)?

8. Bringen Sie auf kartesische Endform: $z = \frac{3+2j}{2-3j}$. Was ist $|z|$? Wie können Sie nun möglichst einfach auf $|\overline{z}|$, $\left|\frac{1}{z}\right|$ kommen, ohne diese Zahlen auszurechnen? Rechnen Sie jedoch all diese Zahlen auch aus, in kartesischer Endform, und überprüfen Sie Ihre Resultate für die Beträge.

9. Welche exakte Polarform hat $z_1 = 5 - 5\sqrt{3}j$? Dagegen: Welche exakte (!) Polarform können Sie allenfalls für $2 - 3j$ angeben? Woran liegt das?

10. Wie lautet die konjugierte Zahl zu $z = 4e^{-j\pi/3}$ und allgemein zu $re^{-j\alpha}$ mit reellem Wert von α?

Übung (10)

1. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die folgende Gleichung: $\frac{2+z}{1+jz} = 3 - j$.
2. Welches sind alle komplexen 5. Wurzeln aus 3? Skizzieren Sie sie. Welcher Satz wird mit der Lage dieser Wurzeln illustriert?
3. Sei $z = 3e^{-j\pi/4}$. Berechnen Sie von Hand die Zahl z^5 (Endform!).
4. Was für ein Gebilde wird parametrisiert mit $z(t) = te^{jt}$, $t \geq 0$? (Grobe Skizze genügt.)
5. Berechnen Sie die kartesische Endform (R, L, ω sind reell und alle größer als Null) von

$$\frac{1}{\frac{1}{R+1/(j\omega C)} + \frac{1}{j\omega L}}.$$

   Überlegen Sie auch, von welcher Schaltung hier der Gesamtwiderstand dargestellt wird. Prüfen Sie Ihr Rechenergebnis auch für die Randfälle $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$. Denken Sie auch an Einheitenkontrolle.

6. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem in $\mathbb{C}$ (mit ω, R, C, L als äußeren Parametern (deren Werte alle > 0 seien) und I_1, I_2 als Unbestimmten):

$$\begin{aligned} \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I_1 + RI_2 &= U \\ RI_1 + (R + j\omega L)\, I_2 &= 0 \end{aligned}$$

7. Schreiben Sie mit Additionstheorem Gleichungen für $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$ hin, und gewinnen Sie eine (später nützliche!) Umformung für $\cos(x)\cos(y)$ sowie für $\sin(x)\sin(y)$.
8. Geben Sie *alle* Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + 2\cos(4x - 2)$ (in parametrisierter Form). Was sollte man überlegen, um schnell den Graphen zu zeichnen, unter Markierung der wichtigsten quantitativen Eigenschaften?

Übung (11)

1. Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^3)$, $x^3\sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien ausdrücklich fest.

2. Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von f liegt spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = c$'..

3. Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

4. Eine Größe hat zur Zeit t_0 den Wert 100, und ihr Wert fällt in 3 Zeiteinheiten jeweils auf ein Zehntel. Beschreiben Sie diesen Vorgang mit einer geeigneten linearen Transformation der Exponentialfunktion.

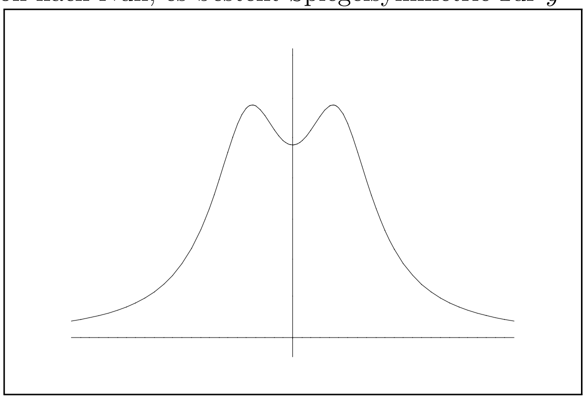
5. Wie lang müssen Sie warten, bis eine radioaktive Strahlung auf ein Tausendstel abklingt, bei einer Halbwertszeit von 120 Jahren?

6. Lösen Sie die Gleichungen $3^{2x-3} = 10$ und $\log_5(x) = 15$.

7. Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an. Nutzen Sie das elementare Graphenkonstruieren aus bereits vorhandenen Grundgraphen. Vergessen Sie auch nicht, sofort nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen.

   (a) $f(x) = e^x \cdot \ln(x)$ - sagen Sie etwas Qualitatives zur Existenz von Wendepunkten.
   (b) $g(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$
   (c) $h_1(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $h_2(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, $h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

8. Geben Sie einen möglichst einfachen Rechenausdruck an, dessen Graph *qualitativ* so aussieht (die Werte gehen zu beiden Seiten monoton nach Null, es besteht Spiegelsymmetrie zur $y-$ Achse):



Ein Hinweis: Es wird leichter, wenn Sie zunächst eine einfache Glockenform produzieren und daraus das Verlangte basteln. (Selbstverständlich gibt es *sehr viele* Funktionen, deren Graphen qualitativ so aussehen.)

Übung über das Osterwochenende

1. Schreiben Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.

2. Berechnen Sie folgende Ableitungen:

   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x - 2\sqrt{x^{\sqrt{2}}} + x^{-\pi-1} + \ln(x) - 3\cos(x)\right)$

   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-5x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}(-2x-1)^3$

   (c) $\frac{d}{dx}(e^x \tan(x))$ (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)

   (d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(2x)}{1-\tan(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?

   (e) $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\ln(2)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln^2(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Klären Sie auch die Extremwertfrage quantitativ.

   (f) $\frac{d}{dx}\left(x - x^3\right)^4$ (Kettenregel, nicht ausmultiplizieren!)

   (g) $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$

   (h) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x^3}{(x-\alpha)^3(x-3)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)

   (i) $\frac{d}{dx}\log_a(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ ($a > 0$ in beiden Fällen)

3. Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = x + \ln(x)$ für $x \to \infty$? Was bedeutet das graphisch?

4. Wie sieht der Graph aus zu $g(x) = \sin(e^x)$? (Geben Sie eine (sehr) grobe Skizze), die qualitativ das Wesentliche zeigt. Wo liegen die Maxima? Überlegen Sie das direkt, verifizieren Sie es auch über die 1. Ableitung.

5. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ für den Ausdruck $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(3x)}}$. Wie groß ist der relative Fehler bei entsprechender Näherung von $f(-0.1)$?

6. Sie suchen eine Funktion der Form $f(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$ mit Konstanten α, β. Wie müssen Sie α, β wählen, um die Bedingungen zu erfüllen: $f(0) = 1$ und $f'(0) = 2$? Wie können Sie nunmehr eine Funktion g (wieder der angegebenen Form) bilden, für die gilt: $g(t_0) = 1$ und $g'(t_0) = 2$?

7. Zeigen Sie, dass die Kurve $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, zu jeder Zeit t denselben Winkel mit der $xy-$Ebene bildet. Wie groß ist dieser Winkel?

8. Wie kann man schnell (grob qualitativ) den Graphen von $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)(x+1)}$ bekommen? Klären Sie auch zu dieser Funktion die Extremwertfrage.

9. Versuchen Sie eine Schar von differenzierbaren Funktionen anzugeben, welche die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ beliebig gut nähern.