Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Rechnen Sie nach, dass für alle Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$.

2. Rechnen Sie mit ordentlicher Bruchrechnung nach, dass $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ für natürliche Zahlen n und k, $k+1 \leq n$.

3. Welche Bedingung müssen a, b, c erfüllen, damit die Lösungsmenge der Bestimmungsgleichung $y = a + bx + cx^2$ eine Parabel ergibt, die ihren Scheitelpunkt in $(2, 3)$ hat? Wie viele freie Parameter braucht man also, um die Menge dieser Parabeln zu beschreiben? Was ist die geometrische Bedeutung davon?

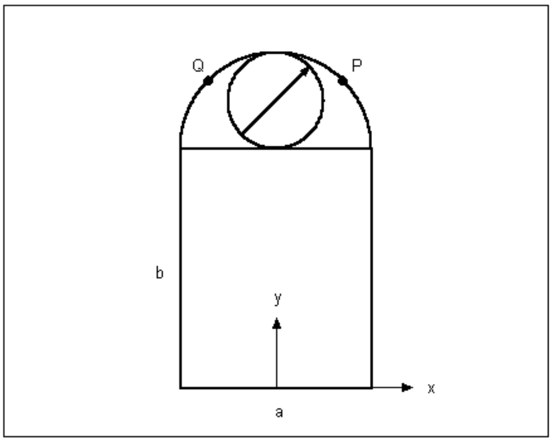
4. Seien $\vec{x}_P = (-2, 3, -1)$, $\vec{x}_Q = (4, 2, 2)$. (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$. (b) Welche Gerade liegt genau in der Mitte zwischen h und der Geraden g, welche durch P und Q geht? (c) Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die zwischen den Geraden g und h liegen, einschließlich dieser Geraden als Ränder. (d) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die Ebene, welche durch $2x + y - z = 1$ gegeben wird?

5. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene im dreidimensionalen Raum, welche durch die Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$ beschrieben ist.

6. Schneiden Sie die Kurve, welche parametrisiert ist durch $\vec{x}(t) = \left(1 + t, 2 - t - t^2, 3 + t - 2t^2\right)$, $t \in \mathbb{R}$, mit der Ebene $x + y + z = 1$.

7. Wie sieht die Lösungsmenge der Ungleichung $|x| + 3|y| \leq 1$ geometrisch aus? (Symmetrien?)

8. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, und der Kreis ist einem Halbkreis einbeschrieben, der eingezeichnete freie Vektor bilde einen Winkel von 45 Grad mit der $x-$ Achse, die Punkte P, Q haben offensichtliche Lage, a und b bezeichnen Längen. Geben Sie die Koordinatendarstellungen für P, Q und den eingezeichneten Vektor. Parametrisieren Sie den einbeschriebenen Kreis.



9. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g. Beschreiben Sie Gebilde b. in beiden üblichen Formen, auch h. in ordentlicher Form. (Was haben die Ungleichungen jeweils zu bedeuten?)

a. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda^3 + 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (2 + 3\lambda, 1 - 4\lambda)$, $0 \leq \lambda \leq 1$. c. Im $\mathbb{R}^2$: $2x^2 = y^2$. d. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1) + \mu(3, 4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. e. Im $\mathbb{R}^3$: $z^2 = x^2 + y^2 - 1$. f. Im $\mathbb{R}^3$: $z = x^2$. g: Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}\left(\lambda\right) = \left(\lambda, \lambda^2, \lambda^3\right)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. h. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2 - \mu, -2\lambda + 3\mu - 1, 3\lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Übung (5)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge formal aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 2u - 2v &= 1 \\ x + \quad 3y - 2u + v &= 0 \\ 2x \quad + 3y - u + 2v &= 0 \end{aligned}$$

2. Zwei Ebenen im E^3 sei bezüglich eines Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{5}z &= 0 \end{aligned}$$

   beschrieben. Worin schneiden sich die Ebenen?

3. Schneiden Sie Ebene E, welche durch die Gleichung $2x - y + z = 1$ beschrieben wird, mit der Ebene F, welche parametrisiert ist mit $\vec{x}_F(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(-2, 1, 1) + \mu(-1, 2, 3)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Vergleichen Sie den Vorgang mit dem bei der vorigen Aufgabe. Warum ist es lästiger, bei derselben geometrischen Aufgabe mit zwei Parameterdarstellungen zu arbeiten?

4. Eine Bewegung eines Teilchens sei so beschrieben, dass der Ort zur Zeit t gerade $\vec{x}(t) = (2, 3, 4) + t(2, -1, 3)$ ist, $t \in \mathbb{R}$. Beschreiben Sie nunmehr eine Bewegung derart, dass dieselbe Gerade im selben Sinne wie bei $\vec{x}$ durchlaufen wird, jedoch der Ort zur Zeit $t = 0$ gleich $\vec{x}(1)$ ist und die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit doppelt so schnell verläuft. Beschreiben Sie auch eine solche Bewegung durch die Gerade, bei der die Geschwindigkeit nicht konstant ist, jedoch immer noch jeder Punkt genau einmal besucht wird.

5. Was für eine Bewegung wird beschrieben durch $\vec{x}(t) = \vec{x}_P + \vec{a}\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, mit konstantem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$?

6. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 3, 4)$. Eine Ebene E sei dadurch gegeben, dass P und Q auf ihr liegen und der Vektor $\vec{a} = (1, 2, -2)$ parallel zu E liegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für E.

7. Ein Fluss konstanter Breite b habe parallele gerade Ufer, und das Wasser fließe darin überall gleichmäßig parallel zum Ufer mit Geschwindigkeit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Ein Schwimmer möchte das jenseitige Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreichen, also den Fluss genau senkrecht zu den Ufern passieren. Welche Eigenschaft muss sein Geschwindigkeitsvektor *relativ zum Wasser* (auch den setzen wir als konstant an) haben, damit das gelingt? Man nehme dazu an, dass der Fluss dem Schwimmer seine Stömungsgeschwindigkeit augenblicklich und stets zusätzlich zu der Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser mitteile. Man fasse das Problem als zweidimensionales koordinatenmäßig, indem man den Ursprung in den Startpunkt des Schwimmers setze und die Achsenrichtungen günstig wähle.

Übung (6)

1. Betrachten Sie folgende Schar von Geraden g_α, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\vec{x}_{g_\alpha}(\lambda) = (1,2,2) + \lambda(\alpha, 1, -3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Schneiden Sie jede dieser Geraden mit der Ebene $2x - y + z = 1$. Wie sieht die Menge aller gewonnenen Schnittpunkte geometrisch aus?

2. Sei die Ebene E gegeben durch die Gleichung $3x - 4y + 5z = 1$. Denken Sie sich E als undurchsichtig. Sei $\vec{x}_P = (1,2,2)$. Kann man den Punkt P vom Ursprung aus sehen?

3. Sei die Ebene E gegeben durch $\vec{x}(\lambda, \mu) = (1,2,-1) + \lambda(2,1,1) + \mu(3,-1,2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene F, die parallel zu E liegt und auf welcher der Punkt P liegt, $\vec{x}_P = (1,3,2)$. Stellen Sie auch fest, ob E und F nicht etwa zusammenfallen.

4. Liegt die Gerade g, parametrisiert durch $\vec{x}_g(\alpha) = (1,2,1) + \alpha(-2,1,-3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, parallel zur Ebene E aus Aufgabe 3?

5. In den Punkten P, Q, R, S mit den Ortsvektoren $\vec{x}_P = (1,2,-3)$, $\vec{x}_Q = (-2,1,-4)$, $\vec{x}_R = (3,-2,1)$, $\vec{x}_S = (0,0,0)$ liegen Massen $m_P = 1$, $m_Q = 2$, $m_R = 3$, $m_S = 4$. Geben Sie den Schwerpunkt des Systems dieser vier Massenpunkte an.

6. Prüfen Sie (mit den bisher zur Verfügung stehenden Mitteln), ob folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind: $\vec{a} = (1,2,3,1)$, $\vec{b} = (2,0,3,4)$, $\vec{c} = (3,1,4,5)$. Geben Sie auch einen Vektor des $\mathbb{R}^4$ an, der nicht als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ geschrieben werden kann.

7. Die Punkte A, B, C mögen nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte im Dreieck ABC, unter Verwendung von $\vec{x}_A, \vec{x}_B, \vec{x}_C$. Versuchen Sie, die Sache auf eine beliebige endliche Punktezahl auszudehnen.

Übung (7)

Alle im Zusammenhang von Längen und Winkeln betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen! (Nur aus Platzersparnisgründen werden hier zuweilen Zeilenvektoren geschrieben.)

1. Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ 4x - 3y + 5z &= 2. \end{aligned}$$

   Lösen Sie das zugehörige homogene System. Was wissen Sie nunmehr über die Lösungsmenge des vorgegebenen inhomogenen Systems? Tun Sie das noch Benötigte, um diese Lösungsmenge zu bekommen.

2. Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ habe die Lösungsmenge in parametrisierter Form: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit linear unabhängigen $\vec{a}, \vec{b}$.

   (a) Welche Lösungsmenge hat dann $A\vec{x} = \vec{0}$?

   (b) Kann $\vec{c} = \vec{0}$ und $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ sein? Kann $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ sein?

   (c) Kann es einen Vektor $\vec{d}$ geben, so dass $A\vec{x} = \vec{d}$ die leere Lösungsmenge hat?

3. Warum ist das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   nicht für alle $\vec{b}$ lösbar? Geben Sie einen konkreten Vektor $\vec{b}_0$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}_0$ nicht lösbar ist. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge der Vektoren $\vec{b}$, für die $A\vec{x} = \vec{b}$ wenigstens eine Lösung hat.

4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 120 Grad im Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: Benutzen Sie $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$. Dann können Sie die benötigten Sinus- und Cosinuswerte leicht ermitteln.

5. Stellen Sie fest, ob folgende Abbildungen linear sind, und geben Sie im positiven Falle die Matrix dazu an:

   (a) Parallelprojektion aller Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ auf die $xy-$ Ebene parallel zum Vektor $(1, 2, 3)$.

   (b) Senkrechte Projektion aller Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ auf den Vektor $(1, 2, 3)$.

   (c) $\vec{f}(\vec{x}) = |\vec{x}|\,\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

6. Warum ist die Spiegelung an der Ebene $x = 3$ im $\mathbb{R}^3$ keine lineare Abbildung? Welchen einfachen Rechenausdruck können Sie aber für diese Abbildung angeben? Warum ist dagegen eine Spiegelung an einer beliebigen Ursprungsebene eine lineare Abbildung? (Begründen Sie das abstrakt geometrisch, ohne eine solche Spiegelung allgemein rechnerisch darzustellen.)

7. Welche Länge hat der Vektor $(2\sin t, 3\cos t, 4)$? Welche Länge hat also der Vektor $(-6\sin t, -9\cos t, -12)$?

Übung (8)

1. Begründen Sie, dass $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Geben Sie einen Vektor der Länge $\frac{1}{3}$ in Richtung des Vektors $(1,1)$ an.

2. Seien $\vec{x}_P = (1,2,3)$, $\vec{x}_Q = (2,1,-5)$. Was ist der Abstand zwischen P und Q?

3. Rechnen Sie schnell im Kopf folgende Skalarprodukte aus:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Kann man den allgemeinen Ausdruck $\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}$ vereinfachen? Kann man den Ausdruck $\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|$ vereinfachen? (Wenn ja, mit welchen Schritten genau?) Kann man $\frac{|\vec{b}|\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2\vec{a}^2}$ vereinfachen?

5. (a) Multiplizieren Sie aus: $\left(\frac{1}{2}\vec{x} - 4\vec{y}\right)^2$.

   (b) Was kommt bei $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$ heraus, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen? Welchen geometrischen Satz drückt das Resultat aus?

   (c) Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) + 3\vec{a}\left(\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}\right)$

6. Welchen Winkel bildet der Vektor $(1,2,3)$ mit der $yz-$ Ebene? Wie kann man also den Winkel zwischen einer Geraden und der $yz-$ Ebene ausrechnen, wenn man eine Parameterform für diese Gerade kennt?

7. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $3x + 2y + z = 1$.

   (a) Wie lauten die Achsenabschnitte dieser Ebene?

   (b) Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der senkrecht auf E steht.

   (c) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?

   (d) Welchen Abstand hat E vom Punkt P, $\vec{x}_P = (2,3,4)$?

   (e) Welchen Abstand hat E von der Ebene F, die durch $-6x - 4y - 2z = 10$ beschrieben ist?

   (f) Welchen Winkel bildet E mit der Ebene H, die durch $3x + y - 2z = 0$ beschrieben ist?

   (g) Wie kann man von einer Geraden g mit Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_Q + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit beliebigem Orts- und Richtungsvektor, feststellen, ob g auf E liegt?

8. Rechnen Sie mittels der senkrechten Projektion den Flächeninhalt F des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms aus. Rechnen Sie nach, dass $F^2 = \vec{a}^2 b^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$ gilt.