

Übung (2)

1. Welche der folgenden Gleichungen ist linear / quadratisch / Polynomgleichung / nichts davon in x ? Lösen Sie die betreffenden Gleichungen in den machbaren Fällen. Versuchen Sie sich daran, auch in nicht rechenbaren Fall etwas zur Existenz von Lösungen zu sagen.

$$\begin{aligned}\sqrt{x}(1-x)^5 &= x^3, \\ (1+x)^5 &= \sqrt{a} \\ x \sin^3(a) - 2 &= (3-x) \cos^2(a) \\ \frac{a+1}{x} + x &= 1\end{aligned}$$

Zusatzfragen: Was für eine Gleichung ist die dritte in a / in $\sin(a)$? Was für eine Gleichung ist die vierte in a ? Lösen Sie die letzte Gleichung als Gleichung mit zwei Unbestimmten x, a .

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 1 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (2y)^2 &= 1\end{aligned}$$

Überlegen Sie auch, was für Gebilde hier geschnitten werden, und skizzieren Sie diese grob, so dass Sie geometrisch bereits sagen können, wie viele Lösungen es gibt und wie sie zueinander liegen. Beachten Sie, was hier heißt: 'Eine Lösung'. Erkennen Sie auch die Symmetrien (geometrisch und formal im System).

3. Schreiben Sie folgende Summe aus: $\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. Welcher Klasse gehört dieser Ausdruck an?
4. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:

$$\frac{1}{4} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{10} + \frac{x^8}{12} - \frac{x^{10}}{14}$$

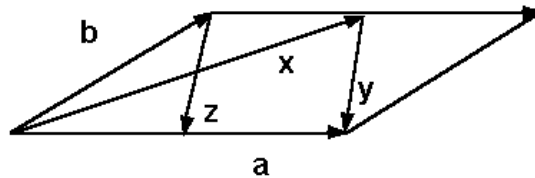
5. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 7 Leute aus 12 Leuten auszuwählen? (Kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie das Resultat im Kopf errechnen können.)
6. Den absoluten Fehler einer Messung einer Größe gibt man so an: Wahrer Wert der Größe minus Messwert. Der relative Fehler ist der Quotient: Absoluter Fehler geteilt durch wahren Wert (der dafür nicht Null sein darf). Bezeichnen wir den relativen Fehler mit r_w . In Ermangelung des wahren Wertes bildet man auch den relativen Fehler r_m , worin der Messwert anstelle des wahren Wertes in den Nenner gesetzt ist.
- (a) Statt ideal korrekt 5m misst man 5.001 m. Wie groß ist der relative Fehler?
- (b) Warum bleibt bei Einheitenwechsel der relative Fehler unverändert? (Das sollten Sie verbal ordentlich begründen können.)
- (c) Geben Sie eine Formel für $r_w - r_m$, welche diese Größe in absolutem Fehler, wahren Wert und Messwert ausdrückt.
7. Sie schütten einen Liter Flüssigkeit mit einer Konzentration von 1000 Teilchen pro cm^3 zusammen mit drei Litern Flüssigkeit mit einer Konzentration von 2000 Teilchen pro cm^3 . Welche Konzentration erhalten Sie insgesamt?

8. Wie groß darf v/c ($v, c > 0$) höchstens sein, damit $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ höchstens um 10^{-8} von 1 abweicht?

9. Setzen Sie die Funktion $f(n) = \sum_{k=0}^n k^2$ ($n \in \mathbb{N}$, Null eingeschlossen!) als Polynom dritten Grades mit unbestimmten Koeffizienten an, und ermitteln Sie die Koeffizienten durch Einsetzen von konkreten kleinen Werten für n . (Zusätzlich können Sie probieren, für die resultierende Formel einen Induktionsbeweis zu geben.)

Übung (3)

1. Schreiben Sie mittels der Binomialkoeffizienten nach Potenzen von x geordnet hin: $(x - 2)^5$.
2. Ein Polynom in x vom Grad n wird mit einem Polynom vom Grad m multipliziert. Was für ein Ausdruck kommt dabei heraus? Wie rechnet man den Koeffizienten von x^3 im Resultat aus? Verallgemeinerung?
3. Seien f und g gebrochen rationale Funktionen in x . Was für Funktionen sind dann h und k , definiert durch $h(x) = f(x)g(x)$ sowie $k(x) = g(f(x))$?
4. Was bedeutet in der Ebene die Beziehung $y^2 > 1 + x^2$? (Welche Punktmenge wird dadurch beschrieben?)
5. Betrachten Sie die Ellipse $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = 1$. (Skizzieren Sie sie auch.) Schneiden Sie nun alle Geraden, welche durch den Punkt $(-2, 0)$ gehen, mit dieser Ellipse. (Beachten Sie: Der äußere Parameter der Steigung wird allgemein mitgezogen.) Drücken Sie nunmehr jeden Ellipsenpunkt außer $(-2, 0)$ aus durch die Steigung derjenigen Geraden der beschriebenen Familie, welche diesen als zweiten Schnittpunkt (neben $(-2, 0)$) mit der Ellipse hat. Gewinnen Sie damit eine neue Parametrisierung der Ellipse, und schreiben Sie diese ordentlich hin. (Überraschung?)
6. In der folgenden Skizze sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} gegeben und die Vektoren \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} gesucht, also letztere in \vec{a} , \vec{b} auszudrücken durch die geometrischen Vektorraumoperationen. Zu verstehen: Die ganze Figur ist ein Parallelogramm, \vec{x} und \vec{z} (genauer: deren hier gezeichnete Repräsentanten) stoßen auf den jeweiligen Seitenmittelpunkt.



7. Skizzieren Sie in der Ebene exemplarisch den geometrischen Gehalt der Aussage $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$. An welchen geometrischen Satz erinnert das?
8. Wie viele Zahlenangaben benötigen Sie jeweils, um zu beschreiben: Eine Richtung in der Ebene / eine Richtung im dreidimensionalen Raum / ein Parallelogramm in der Ebene mit genauer Lage / ein Parallelogramm (nur die Form mit genauen Maßen, also bis auf Kongruenz)

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein, mit vollem Quader.
2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$. Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der x - Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der z - Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der y - Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.
 - (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?
 - (b) die obere Würfelseitenfläche,
 - (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,
 - (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts hinten ausgeht.
 - (e) Versuchen Sie, alle Würfelseitenflächen auf einmal zu beschreiben. Verwenden Sie dazu die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Hinweis: Bilden Sie Summen dieser Vektoren mit geeigneten Vorfaktoren (Koeffizienten), und vergessen Sie die Lage des Würfelmittelpunktes nicht.
3. Seien die Punkte P, Q, R durch folgende Koordinatendarstellungen ihrer Ortsvektoren gegeben: $\vec{x}_P^K = (3, -4)$, $\vec{x}_Q^K = (2, 3)$, $\vec{x}_R^K = (4, 5)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch P geht, die Strecke \overline{QR} im Verhältnis 1:2 teilt und näher bei Q hindurchgeht.
4. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in x - Richtung, großer der Länge 4 in y - Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.
5. Geben Sie eine Parameterdarstellung für den Kreis (die begrenzende Kreiskurve ist gemeint) in der Ebene mit Mittelpunkt $(3, 1)$ und Radius 5. Geben Sie nunmehr eine Parametrisierung für die Spiegelung dieses Kreises an der y - Achse. Was für ein Gebilde ergibt sich, wenn man alle Ortsvektoren der Kreispunkte (sagen wir des ursprünglichen Kreises) mit 10 multipliziert?
6. Sie projizieren den Kreis, parametrisiert durch $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leq t < 2\pi$, parallel auf die Ebene $x = 2$, indem Sie jeweils einen Sehstrahl parallel zu $(2, 0, 1)$ von einem Kreispunkt ausgehen lassen und diesen Sehstrahl mit der Ebene $x = 2$ schneiden. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Punktmenge, welche diese Projektion ergibt.