Übung (14)

1. Skizzieren Sie grob den Graphen zu $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$, und machen Sie sich klar, dass es dabei wenigstens einen Wendepunkt geben muss. Berechnen Sie nun auch dessen Lage.
2. Berechnen Sie den Scheitelpunkt der Parabel, die mit $\vec{x}(t) = (1,2,2) + t(2,-1,3) + t^2(2,-2,-3)$ parametrisiert ist. Hinweis: Schauen Sie nur nach, an welchem Punkt Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor senkrecht aufeinander stehen.
3. Bilden Sie naiv $\frac{d}{dt}e^{jt}$, und zeigen Sie, dass dasselbe herauskommt wie beim Ableiten von $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, nur eben in der komplexen Schreibweise.
4. In welchen Winkeln schneidet die Spirale $t \mapsto te^{jt}$ die reelle Achse?
5. Welchen Winkel bildet der Geschwindigkeitsvektor bei der Kurve $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ stets mit der $xy-$ Ebene? Welche besondere Eigenschaft haben alle Beschleunigungsvektoren? Geben Sie allgemein für t einen Vektor an, der in Normalenrichtung auf der Ebene steht, die durch Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor gegeben ist. Wie ändert sich die Normalenrichtung in der Zeit? Ändert sich ihr Winkel zur $xy-$ Ebene?
6. Welchen Grenzwert hat $\frac{\ln^5(x)}{x}$ für $x \to \infty$? Welchen Grenzwert hat $\frac{x-\pi/4}{\sin x + \cos x}$ für $x \to \pi/4$?
7. Zeigen Sie mittels des Satzes vom endlichen Zuwachs, dass für $x \geq 0$ stets gilt: $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$

Übung (15)

1. Geben Sie eine Abschätzung für $\int_0^1 e^{x^2 dx}$ nach unten und oben, einmal grob mit Rechtecken, einmal mit Trapezen.
2. Was können Sie *ohne Rechnung* über den Wert von $\int_{-1}^{1} \frac{x \arctan^2(x)}{2+\sin^2(x)} dx$ sagen?
3. Warum ist der Wert von $\int_{-1}^{1} x^6 \sin^4(x) dx$ jedenfalls > 0? Wie können Sie ihn nach oben abschätzen, *ohne* den Wert *dieses* Integrals auszurechnen? (Tun Sie das einmal so, dass Sie dazu gar kein Integral ausrechnen, einmal so, dass Sie ein *viel einfacheres* Integral ausrechnen.
4. Berechnen Sie $\int_0^1 (2e^x - 3x + 4)\, dx$.
5. Berechnen Sie $\int \frac{1-x^2}{x} dx$.
6. Berechnen Sie $\int 2^{3x-1} dx$, $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$, $\int \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{99} dx$, $\int_0^{2\pi} \sin(2\pi x)\, dx$.
7. Berechnen Sie $\int \frac{2}{3x^2-x-3} dx$, $\int \sin(x)\cos(x) dx$, $\int \cos(x)\cos(x+\varphi) dx$ - Hinweis: Algebraische Umformung der Integranden führt hier zum Ziel.
8. Berechnen Sie den Mittelwert der Ortsvektoren $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ für $0 \leq t \leq \pi/2$. Hätten Sie eine inhaltliche Interpretation dafür anzubieten?

Aufgaben zum Wochenende (4)

1. Sie suchen eine Funktion, deren Graph wie eine Sinusschwingung aussieht. Allerdings soll die Periodendauer nur 1/2 betragen, der Mittelwert soll bei 5 liegen. Der Phasenwinkel soll $\pi/4$ betragen. Wie sollte der Rechenausdruck aussehen? Wie lauten alle Maxima (Abszissenwerte!)?
2. Versehen Sie $\arctan(x)$ mit einem Summanden, so dass die Werte für $x \to \infty$ nach ∞ gehen, für $x \to -\infty$ nach $-\infty$, und zwar asymptotisch wie eine Gerade. Versehen Sie $\arctan(x)$ auch mit einem Faktor, so dass die Werte für $|x| \to \infty$ nach Null gehen.
3. Diskutieren Sie die Funktion $f(t) = \frac{e^{-3t}}{1-t^2}$. (D.h. stellen Sie alle wesentlichen Eigenschaften fest; geben Sie auch eine grobe Skizze; beantworten Sie die Extremwertfrage auch quantitativ.)
4. Berechnen Sie folgende Ableitungen: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\ln(1+x^4)} + \sqrt[3]{2t-1}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(2t+1, \cos(3t+1)\right)$.
5. Beantworten Sie die Extremwertfrage quantitativ zu folgenden Funktionen: $f(x) = x^n e^{-x}$, $g(x) = e^{\sin(x)}$, $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$.
6. Wie verhält sich die Funktion $k(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ an der Stelle $x = 0$?
7. (a) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int_0^2 2^{3x}dx$, $\int_0^{\pi/4} \cos(nx-1)dx$ (wie entwickelt sich der Wert mit $n \to \infty$?), $\int \sin^2(x)dx$ (algebraisch umformen!), $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$.
   (b) Berechnen Sie $\int x\sqrt{2x-1}dx$, $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}dx$ (geht am einfachsten mit einer linearen Substitution!).
   (c) Berechnen Sie $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$, $\int \cos(x)e^{\sin(x)}dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx$ (Umkehrung Kettenregel!).
   (d) Berechnen Sie $\int \frac{x}{(x-1)(2-x)}dx$, $\int \frac{x^2-1}{x^2+x+1}dx$.
8. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für $\frac{x^3-x+\sin^2(x)}{\cos(2x+1)}$ für kleine $|x|$.
9. Sie haben den Radius eines Zylinders als 5 m mit einem Fehler von höchstens 1 cm vermessen, die Höhe des Zylinders zu 10 m, mit einem Fehler von höchstens 2 cm. Geben Sie eine lineare Abschätzung für den Höchstfehler für die aus den Messwerten resultierende Volumenbestimmung für den Zylinder.
10. Ein Teilchen unterliegt zur Zeit t der Beschleunigung $(0, \cos t, -1)$. Wie sieht die zugehörige Ortsfunktion $t \mapsto \vec{x}(t) =$ Ortsvektor des Ortes zur Zeit t aus, wenn die Anfangsbedingungen lauten: Ort zur Zeit $t = 0$ ist $(0, 0, 1)$, Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ist $(1, 1, 1)$?

Abschließende Übungen

1. Berechnen Sie folgende Ableitungen: $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{3x+4}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\ln(x^2+1)}$.
2. Berechnen Sie folgende Integrale: $\int \sin(2x-1)dx$, $\int \sqrt[3]{3x+4}$, $\int \frac{x}{1-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.
3. Diskutieren Sie den Graphen von $f(x) = x^3(1-\sqrt{x})$ im maximalen reellen Definitionsbereich. Klären Sie insbesondere quantitativ die Extremwertfrage, auch die nach Wendepunkten. Wie verhält sich die Funktion bei $x = 0$?
4. Welcher einfacheren Kurve nähert sich der Graph von $f(x) = \sqrt{x^4+1}$ für $|x| \to \infty$ asymptotisch?
5. Wie sieht die Näherung 1. Ordnung aus von $\sin(\pi/4 + 0.1)$?
6. Klären Sie quantitativ die Extremwertfrage für alle Funktionen $f_\alpha(x) = \frac{x}{1+\alpha x^2}$.
7. Welche Halbwertszeit hat ein Material, von dem in 100 Jahren 90 Prozent zerfällt?
8. Berechnen Sie $\frac{d}{d\omega}(R + j\omega L)$ - ω reell, $R, L \neq 0$ reellwertige äußere Parameter.
9. Geben Sie in Parameterform die Gerade an, welche Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = (t, \sin(t))$ im Punkt $\vec{x}(1)$ ist. Geben Sie ebenso die Gerade an, welche die Kurve im selben Punkt senkrecht durchschneidet. Geben Sie diese Geraden auch direkt in Gleichungsform an, und sehen Sie, dass dasselbe herauskommt.
10. Geben Sie Tangente und Normale zum Einheitskreis im Punkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.
11. Welchen Winkel bildet die Ebene durch die Punkte A, B, C mit $\vec{x}_A = (1, -2, 2)$, $\vec{x}_B = (-2, 1, 3)$, $\vec{x}_C = (2, 1, 4)$ mit der $yz-$ Ebene?
12. Geben Sie in Normalenform die Ebene an, welche die Kurve $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ im Punkte $\vec{x}(\pi/3)$ senkrecht schneidet.
13. Welche komplexen Zahlen z erfüllen die Gleichung $\overline{z}(1-z) = z(1+\overline{z})$?
14. Lösen Sie die Gleichung $(1-2j)z = 1+3j$.
15. Lösen Sie die Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$. Wie verhalten sich die Lösungen zueinander?
16. Sind die Vektoren $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ linear unabhängig?
17. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{3}{2}z &= 1 \\ \tfrac{1}{2}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{4}{3}z &= 1. \end{aligned}$$