Übung (8)

1. Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) + 3\vec{a}\left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right)$
2. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:
$$\left|\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} - \frac{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\vec{y}}{\vec{y}^2}\vec{y}\right| |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,,$$
$$\left|\frac{\vec{y}}{|\vec{x}|} - \frac{\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\vec{y}}{\vec{y}^2}\vec{y}\right| |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,.$$
3. Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} + 3\vec{y}) \times (3\vec{x} - 5\vec{y})$.
4. Welche Vektoren $\vec{x}$ lösen die Gleichung $\vec{e}_1 \times \vec{x} = \vec{e}_2$? Wie können allgemein die Lösungsmengen von $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$ aussehen ($\vec{x}$ Unbekannte, $\vec{a}, \vec{b}$ äußere Parameter)?
5. Welchen Abstand haben die Ebenen E und F voneinander, die durch die Gleichungen $2x - 3y + 4z = 1$ und $4x - 6y + 8z = 10$ gegeben sind?
6. Welchen Abstand hat die Ebene E, gegeben durch $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (1, 1, 2) + \lambda(2, -1, 3) + \mu(-2, 2, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vom Ursprung? (Bringen Sie E zuvor auf Normalenform.)
7. Führen Sie auf der Ebene E zur Gleichung $x - 2y + z = 1$ ein kartesisches Koordinatensystem ein, mit Ursprung in P, $\vec{x}_P = (2, 2, 3)$. Geben Sie nun eine Parameterdarstellung für den Kreis in E (Randkurve!) um den Punkt P mit Radius 5.
8. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des von $\vec{a} = (1, 2, 2)$ und $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ aufgespannten Parallelogramms. Nun berechnen Sie denselben Flächeninhalt noch einmal mit der Formel $F = \sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}$. Sie können die Gleichheit (am besten der Quadrate) der Resultate leicht beweisen, indem Sie speziell für Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ parallel zur $xy-$ Ebene einfach ausrechnen, dass $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = \vec{x}^2\vec{y}^2 - (\vec{x}\vec{y})^2$. (Warum genügt dieser Spezialfall, um die Gleichheit für *alle* Vektorpaare zu begründen?)
9. Ein Gebilde werde wie folgt parametrisiert: $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t), f(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Dabei sei f eine beliebige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Was können Sie über das Gebilde aussagen? Wählen Sie ein einfaches Beispiel für f, und sagen Sie, wie das aussieht.

Aufgaben zum Wochenende (2)

1. Rechnen Sie zu $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (2,-1,4)$, $\vec{c} = (1,2,-2)$ aus: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $3\vec{c}\left(2\vec{b} \times 4\vec{a}\right)$ - tun Sie das möglichst praktisch, deuten Sie die Resultate geometrisch, und prüfen Sie, dass Sie das ohne jedes Nachschlagen können! Geben Sie eine Parameterdarstellung und eine Normalenform für die Ebene E, die den Punkt $(2,2,1)$ enthält und parallel zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ liegt.
2. Geben Sie die Flugparabel an zum Anfangsort $(2,3,1)$ zur Zeit $t = 3$, zur Anfangsgeschwindigkeit $(1,2,2)$ zur Zeit $t = 3$ und zum Beschleunigungsvektor $(2,2,-2)$. Bringen Sie den Ausdruck auf Endform, so dass Sie leicht die Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ ablesen können. Geben Sie in der Form, die am schnellsten verfügbar ist, eine Ebene an, auf der die Flugparabel liegt. Schneiden Sie die Bahn der Flugparabel mit der Ebene $x - y + z = 1$.
3. Berechnen Sie den Abstand des Punktes P, $\vec{x}_P = (2,2,3)$, von der Ebene $2x-3y+z = 3$. Berechnen Sie auch die Koordinatendarstellung des Punktes P', der durch Spiegelung von P an dieser Ebene entsteht. Kann man von P aus den Punkt Q sehen. $\vec{x}_Q = (-2,-3,4)$, wenn man sich diese Ebene als undurchsichtig denkt? (Überlegen Sie zwei Möglichkeiten, wie man diese Aufgabe lösen könnte, und entscheiden Sie sich für die rechnerisch bequemere.)
4. Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Massenpunktes P, $\vec{x}_P = (3,3,4)$, in dem die Masse m sitzt, bezüglich der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (2,1,1) + \lambda(-1,1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, als Drehachse. Hinweis: Das Trägheitsmoment ist mr^2, wobei r der Abstand des betreffenden Punktes zur Drehachse ist.
5. Stellen Sie fest, ob P auf der Fläche des Dreiecks ABC liegt: $\vec{x}_P = \left(-\frac{1}{2}, 2, 0\right)$, $\vec{x}_A = (1,2,3)$, $\vec{x}_B = (2,3,-2)$, $\vec{x}_C = (-3,1,2)$.
6. Der Punkt $(2,3,5)$ rutscht auf der schiefen Ebene E, beschrieben durch $2x + y + z = 12$, hinab, getrieben von einer Schwerkraft, die in Richtung von $(0,0,-1)$ wirke. An welchem Punkt trifft er auf die $xy-$ Ebene?
7. (Betrachten und beschreiben Sie folgende Sache als ebenes Problem:) Auf einem Karussell des Radius 15 m, das sich 3 mal in der Minute im Uhrzeigersinn dreht, sitzt 5 Meter vom Rand entfernt ein weiteres Karussell vom Radius 3 m, das sich entgegen dem Uhrzeigersinn 10 mal in der Minute dreht. Beschreiben Sie vektoriell die Bewegung eines Punktes auf dem Rande des kleinen Karussells. (Lassen Sie den Anfangsort auf der $x-$ Achse sein. Schreiben Sie die Sache natürlich ohne Einheiten.)
8. Geben Sie die Matrix für die Drehung um die $z-$ Achse mit einem Winkel von 30 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn, wenn man von der positiven $z-$ Achse aus auf die $xy-$ Ebene blickt. Welches Resultat ergibt diese Drehung für den Punkt $(2,2,2)$?
9. An einer senkrechten Wand hängt frei drehbar um den Punkt A ein gleichschenkliges Dreieck, das in A den Winkel 120 Grad hat. Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ sei verschieden von Null und gleich der Länge der Strecke $\overline{AC}$. Das ganze System sei idealisiert als reibungsfrei und masselos. Nun wirkt im Punkt B die Kraft $\vec{K} \neq \vec{0}$ genau senkrecht nach unten, im Punkt C die Kraft $2\vec{K}$. Um welchen Winkel wird sich die Höhe des Dreiecks, die durch A geht, gegen die Senkrechte neigen, wenn das System in Ruhe ist? (Hinweis: Die Summe der Drehmomente sollte Null sein. Betten Sie dazu das zweidimensionale System geeignet in drei Dimensionen ein, um mit dem Vektorprodukt rechnen zu können. Hinweis zum Vorgehen: Bezeichnen Sie allgemein die Koordinaten des Punktes C unten rechts (in der gesuchten unbekannten Ruhelage), wählen Sie A als Ursprung. Nun drehen Sie mittels geeigneter Drehmatrix den Punkt C in den Punkt B. Dann können Sie die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht hinschreiben und lösen.) Zusatzfrage: Kommt es auf den Betrag von $\vec{K}$ und / oder die Länge der Strecke $\overline{AC}$ an?

Übung (9)

1. Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen *exakte* kartesische Darstellungen: $2e^{-j\pi/3}$, $-5e^{7\pi j/4}$, $e^{-22j\pi/6}$ Zeichnen Sie die Zahlen.
2. Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die *exakten* Polardarstellungen: $\frac{1}{j}, -1+j, \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}j$.
3. Geben Sie zu folgender Zahl eine näherungsweise kartesische Darstellung mittels des Taschenrechners, nachdem Sie die genaue unausgerechnete hingeschrieben haben: $z = 2e^{5j}$.
4. Berechnen Sie zu $z = 2-3j$: $|z|$, $\text{Im}(z)$, $\text{Re}(z)$, $1/z$, $z\overline{z}$, $(1+2j)\,z$.
5. Was sind für eine komplexe Zahl z die folgenden Zahlen: $\frac{1}{2}(z+\overline{z})$, $\frac{1}{2j}\,(z-\overline{z})$?
6. Berechnen Sie $|z_1 z_2|$ und $|z_1/z_2|$, *ohne* $z_1 z_2$ oder z_1/z_2 zu berechnen, für $z_1 = 2-j$, $z_2 = 3+4j$.
7. Berechnen Sie die Polardarstellung zu $z = -2-5j$. Berechnen Sie dann z^7, und drücken Sie das Resultat wiederum kartesisch aus. (Sie sollten mit Taschenrechner das genaue kartesische Resultat finden.)
8. Vereinfachen Sie: $\frac{1}{\frac{j}{1-j}+\frac{1}{1-j}}$.
9. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{1+z+j} = 5-j$.
10. Berechnen Sie z : $\frac{1}{z} = \frac{1-j}{2+3j} + \frac{1+2j}{3-j}$.
11. Es gelte die Beziehung $\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) I = U$. Welchen Winkel bilden dann I und U miteinander? (Allgemeiner Ausdruck in den Parametern ω, R, C, die alle reell und > 0 seien.)
12. Wie sehen die wie folgt parametrisierten Mengen komplexer Zahlen aus?
    (a) $z(t) = -3 + jt$, $t \in \mathbb{R}$.
    (b) $z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$, $\omega \in \mathbb{R}, \omega > 0$. ($R, L, C > 0$ feste reelle Zahlen.) Zusatzfrage: Für welchen Wert von $\omega > 0$ wird $z(\omega)$ reell?
    (c) $z(t) = e^{jt}$, $-\pi/4 < t < 0$.
    (d) $z(t) = te^{-jt}$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Übung (10)

1. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die quadratische Gleichung $z^2 - (1-2j)z + 5 = 0$. in exakter kartesischer Form.
2. Sie schalten die komplexen Widerstände $R + j\omega L$ und $\frac{1}{j\omega C}$ parallel: Wie lautet der Gesamtwiderstand?
3. Lösen Sie in $\mathbb{C}^2$ folgendes lineare Gleichungssystem (Unbestimmte I_1, I_2, alle anderen außer U (das ist komplexwertiger äußerer Parameter) reelle Parameter mit lauter Werten > 0):
$$\begin{aligned}(R + j\omega L)\, I_1 + j\omega L I_2 &= U \\ j\omega L I_1 + \frac{1}{j\omega C} I_2 &= 0\end{aligned}$$
4. Rechnen Sie nach, dass $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
5. Drücken Sie mit Hilfe des passenden Additionstheorems als Summe aus: $\sin(x)\cos(y)$.
6. Welche Periodendauer gehört zur Funktion $f(x) = \sin(3x) + \sin(5x)$? Welche Symmetrie besitzt diese Funktion?
7. Skizzieren Sie grob den Graphen zu $g(x) = 3 + 5\cos(4x - 2)$. Nennen Sie alle wesentlichen Eigenschaften. Nennen Sie insbesondere die Abszissenwerte aller Minima.
8. Wie sieht der Graph zu $h(x) = \pi + \arctan(x - 3)$ aus?
9. Vergleichen Sie die Graphen zu den Funktionen mit den Rechenausdrücken $\sin^2(x)$ und $\sin(x^2)$.
10. Kann man eine *beliebige* auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion schreiben?

Übung (11)

1. Schreiben Sie $-2\cos(3x) + 3\sin(3x)$ in der Form $A\sin(3x + \varphi)$.
2. Wie sieht grob der Graph zu $f(x) = x\sin(x)$ aus?
3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{1}{1+e^{x}}$.
4. Lösen Sie die Gleichungen: $2^{3x-1} = 5$, $\log_2(x) = \log_3(x/2)$.
5. Eine Amplitude bei einer gedämpften Schwingung geht pro Sekunde auf die Hälfte zurück. Nach welcher Zeit fällt sie auf ein Hundertstel ab?
6. Modifizieren Sie den Rechenausdruck e^x durch lineare Transformation auf möglichst einfache Weise so, dass der zugehörige Funktionsgraph monoton gegen einen Schwellenwert s wächst, ohne diesen zu erreichen.
7. Sie haben für Größen a, b, die nur Werte > 0 annehmen mögen: $b = 3a^5$. Wie sieht der Graph aus, wenn Sie b gegen a auftragen? Wie sieht dagegen der Graph aus, wenn Sie $\ln(b)$ gegen $\ln(a)$ auftragen, d.h. $\ln(b)$ als neue unabhängige und $\ln(a)$ als neue abhängige Variable nehmen? (Zunächst schreiben Sie die zu folgernde Beziehung zwischen den neuen Variablen hin.)
8. Wie sehen die Graphen aus zu $f(x) = e^{-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1+x^{10}}$ - was ist ähnlich, was verschieden? Nun modifizieren Sie den letzteren Ausdruck, um dieselbe Gestalt viel breiter zu erzeugen, sagen wir 100 mal so breit.
9. Wie sieht der Graph aus zu $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$? Nun betreiben Sie ein wenig Chirurgie am Rechenausdruck, um die Rampe steiler oder wahlweise flacher zu machen / den Funktionswert 1/2 an einer beliebig vorgeschriebenen Stelle x_0 vorzuschreiben / beides zusammen.
10. Geben Sie eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion an, die an der Stelle $x_0 = 0$ eine Nullstelle besitzt, dazu Pole an den Stellen $x_{1,2,3} = 1, 2, 3$. Zudem sollen die Werte gegen Null gehen für $x \to \pm\infty$.