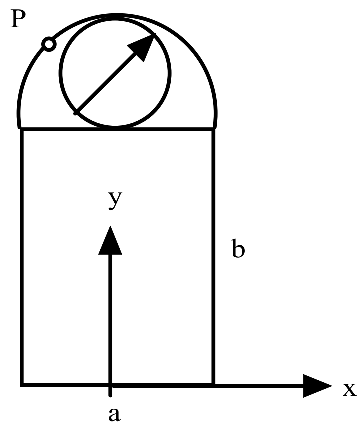
Übung (5)

1. Betrachten Sie folgende Figur:



   Beschreiben Sie den Vektorpfeil im kleinen Kreis als *freien Vektor* in Koordinatendarstellung bezüglich des eingezeichneten Systems. (Der Winkel zur $x-$ Achse sei 45 Grad genau.) Geben Sie auch die Koordinatendarstellung des Ortsvektors von P. Schließlich geben Sie noch die Koordinatendarstellung des Punktes, in dem die Pfeilspitze im kleinen Kreis sitzt. (a und b sind die Seitenlängen des unteren Rechtecks.)

2. Stellen Sie sich vor, Sie nehmen als Koordinatensystem das mit den Einheits-Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, 1, 0), \vec{c} = (1, 1, 1)$. (Diese Koordinatendarstellungen bezüglich eines kartesischen Systems.) Wie sieht dann genau die Punktmenge aus, die parametrisiert ist mit $\vec{x}(\varphi, z) = \cos(\varphi)\,\vec{a} + \sin(\varphi)\,\vec{b} + z\vec{c}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq 5$? (Skizze!) Wie wäre das Volumen des damit verbundenen *Körpers* zu berechnen?

3. (Kartesisches Koordinatensystem!) Ein Würfel steht auf der $xy-$ Ebene achsenparallel, im Abstand 3 von der $yz-$ Ebene, und die $x-$Koordinaten seiner Eckpunkte sind negativ, die $y-$ Koordinaten lauten sämtlich -2 oder 3. Dieser Würfel soll durch Zentralprojektion mit Zentrum in $(2, 0, 8)$ auf die $yz-$ Ebene projiziert werden: Bestimmen Sie die $yz-$ Koordinaten der Projektionen der Würfel- Eckpunkte, und zeichnen Sie das Resultat (deuten Sie dabei das Verdeckte als solches an). Das Projektionsprinzip ist ganz einfach: Der vom Gegenstandspunkt zum 'Auge' (Zentrum) laufende 'Sehstrahl' ist mit der Bildebene (hier also der $yz-$ Ebene) zu schneiden.

4. Hier sind Parameterdarstellungen für zwei parallele Geraden (woran sieht man das sofort?): $\vec{x}(\lambda) = (1, 1, 2) + \lambda(3, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{y}(\mu) = (3, 2, -1) + \mu(-6, -2, 2)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für alle Punkte zwischen den beiden Geraden, diese eingeschlossen. Was müssen Sie tun, um diese von der Menge auszuschließen?

5. Seien $\vec{x}_P = (4, 3, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 1, 1)$, $\vec{x}_R = (2, 1, 3)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene E, auf der P, Q, R liegen. Wie können Sie alle Punkte auf der Dreiecksfläche des Dreiecks PQR (einschließlich des Randes) parametrisieren?

6. Schneiden Sie die Ebenen E und F, welche im dreidimensionalen Raum durch folgende Gleichungen gegeben sind: $E : 3x - 2y + 2z = 1$, $F : -2x + 2y - 3z = 1$.

7. Schneiden Sie die Ebene E der vorigen Aufgabe mit der Ebene H, welche gegeben ist durch $\vec{x}_H(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1, 1) + \mu(-2, 2, -1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Übung (6)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{gathered} x - 2y + 2u - 3v = 1 \\ -3x - 2u + v = 0 \\ 2x + 3y - u + 2v = 0 \end{gathered}$$

2. Sagen Sie wiederum geometrische Deutung und formale Struktur der Lösungsmenge voraus. Lösen Sie dann (unter Nutzung der Besonderheiten des Systems):

$$\begin{aligned} u - 3v &= 3 \\ 2v - w &= 4 \\ 3w - 2u &= 5 \end{aligned}$$

3. Deuten Sie geometrisch, und lösen Sie (lassen Sie eine kleine Geschicklichkeit dabei walten):

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}z &= 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}y + \frac{3}{4}z &= 1 \end{aligned}$$

4. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem (x, y: Unbestimmte, a äußerer Parameter)

$$\begin{gathered} (a-2)x + 3ay = 1 \\ -3x + ay = 0 \end{gathered}$$

   Schreiben Sie das System auch in Matrixform, und berechnen Sie die Determinante der Matrix. Was hat sie mit Ihren Lösungen zu tun?

5. Beschreiben Sie ein Dreieck mit dem Ortsvektor eines Eckpunktes P und zwei Kantenvektoren für die von P ausgehenden Dreieckseiten. Nun betrachten Sie das Dreieck, dessen Ecken die Seitenmitten des ersten Dreiecks sind. Geben Sie zunächst die Ortvektoren für die Ecken des neuen Dreiecks an. Zeigen Sie dann, dass der Schwerpunkt des neuen Dreiecks der Schwerpunkt des alten Dreiecks ist, bei jeweils homogener Massenverteilung auf beiden Dreiecken.

6. Betrachten Sie das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (3, 2, 4), \vec{x}_Q = (-2, 1, -2)$, $\vec{x}_R = (2, 1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Seitenhalbierende, die von P ausgeht - fassen Sie die Seitenhalbierende als Strecke auf.

Übung (7)

1. Berechnen Sie für folgende Matrizen und Vektoren jeweils „Matrix mal Vektor", so weit das definiert ist:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = (3)\,.$$

   Geben Sie einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass $A\vec{x} = \vec{b}$ unlösbar ist.

2. Seien A, B, C die Matrizen der vorigen Aufgabe. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$, $B\vec{y} = \vec{0}$, $C\vec{z} = 0$ sagen? (Unbestimmter Vektor und Nullvektor jeweils passender Länge natürlich.) Rechnen Sie sie nunmehr auch aus. Was können Sie *ohne Rechnung* über die Lösungsmengen beliebiger inhomogener Systeme $A\vec{x} = \vec{b}$, $B\vec{y} = \vec{c}$, $C\vec{z} = \vec{d}$ sagen?

3. Betrachten Sie folgende Abbildung: $\vec{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 3x - 2y + z \\ -2x + y - 4z \end{pmatrix}$. Ist sie linear? Wenn ja, so geben Sie die Matrix A an, so dass $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$ wird. Was entsteht, wenn man A auf den Einheitswürfel, also alle Punkte (x, y, z) mit $0 \le x, y, z \le 1$, anwendet? Geben Sie eine Parameterdarstellung für dies Gebilde, und stellen Sie sich vor, wie das aussieht.

4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 60 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, den Cosinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen.

5. Überlegen Sie, wie man Matrizen so zu verknüpfen hätte, dass die Summe der Abildungen daraus etsteht, also $(A \circ B)\,\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$ allgemeingültig wird. (Hier steht '$\circ$' für diese Operation, die man dann tatsächlich '+' schreibt.) Sagen Sie auch dazu, welche Voraussetzungen die Matrizen A, B erfüllen müssen, damit das funktioniert (die rechte Seite der Gleichung sagt es Ihnen, Sie müssen nur nachschauen, unter welchen Umständen das einen sinnvollen Ausdruck der Vektorrechnung ergibt.

6. Wie sieht die Matrix für die Spiegelung an der $yz-$ Ebene (im $\mathbb{R}^3$) aus? Welche $(3 \times 3)-$ Matrix vertauscht die Komponenten eines Eingabevektors so, dass die erste Komponente an die letzte Stelle rückt, die zweite Komponente an die erste Stelle?

7. Wie sieht die Matrix der Spiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^3$ aus? (Sie laufen vom Punkt zum Ursprung und dann in derselben Richtung noch einmal so weit.) Wie können Sie diese Spiegelung geometrisch als Hintereinanderschaltung von Spiegelungen an Koordinaten-Ebenen erhalten? Geben Sie zu letzteren Spiegelungen die Matrizen, und sehen Sie, dass deren Produkt wirklich die Matrix der Spiegelung am Ursprung ergibt.

Übung (8)

Alle hier betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen!

1. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (5, 2, -1)$.
2. Begründen Sie, dass $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.
3. Welchen Winkel schließen die beiden Vektoren $\vec{a} = (2, 3, -1)$ und $\vec{b} = (2, -2, 3)$ ein? Nutzen Sie das Resultat - genauer den Sinus des Winkels, um den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms zu berechnen.
4. Ist die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto$ senkrechte Projektion von $\vec{x}$ auf $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ fest) eine lineare Abbildung? Wie sieht die Matrix aus? Welcher geometrischen Tatsache entspricht der Rang dieser Matrix, also die Dimension des von den Zeilenvektoren (oder Spaltenvektoren) aufgespannten Raumes?
5. (a) Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.
   (b) Vereinfachen Sie: $2\left(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}\right) + 2\vec{a}\left(\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}\right)$
6. Warum ist $3\vec{x} + \vec{x}\vec{y}$ kein sinnvoller Ausdruck der Vektorrechnung?
7. Warum ist $\vec{a}^2\vec{b}^2$ nicht dasselbe wie $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$?.
8. Wie können Sie den Ausdruck $\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|$ vereinfachen? Warum kann es keinesfalls sein, dass da $\left|\vec{b}\right|$ herauskommt?
9. Welchen Winkel bildet die Gerade g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$ Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).
10. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{x} = (3, 2, -4)$ in eine vektorielle Komponente parallel zu $\vec{a} = (1, 2, -3)$ und eine senkrecht zu $\vec{b} = (2, 1, 1)$.
11. Gegeben sei das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (1, 2, 2), \vec{x}_Q = (3, 1, -1), \vec{x}_R = (2, 4, 1)$.

    (a) Geben Sei eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch P geht und den Winkel des Dreiecks bei P halbiert. Nutzen Sie eine naheliegende anschauliche Idee.

    (b) Rechnen Sie auch nach, dass der Winkel halbiert ist.

    (c) Geben Sie eine Formel für die Berechnung der Länge der winkelhalbierenden *Strecke* zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ für ein Dreieck, das mit den linear unabhängigen freien Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ bechrieben ist.

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie mittels des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks PQR, $\vec{x}_P = (2,3,4)$, $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$, $\vec{x}_R = (3,1,1)$.

2. Wie können Sie zu einer Geraden (in der Ebene) $y = mx + b$, $m \neq 0$, die Gleichung der dazu senkrechten Geraden durch den Punkt (x_0, y_0) produzieren? (Stellen Sie die gesuchte Gerade in Normalenform dar, formulieren Sie anschließend die Gleichung für die gesuchte Gerade wieder in Form der Bestimmungsgleichung.)

3. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1,2,2) + \lambda(2,1,-1) + \mu(2,-3,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der $xy-$ Ebene sowie zwischen E und der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2,3,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P, $\vec{x}_P = (3,4,3)$. Spiegeln Sie E an der durch P gehenden parallelen Ebene. (Achten Sie darauf, was man als Resultat zur letzten Frage angeben sollte!)

4. Schauen Sie sich die Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a} = (3,2,-2)$, $\vec{b} = (0,1,1)$, $\vec{c} = (4,-3,3)$ an. Lösen Sie nun die Gleichung $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, indem Sie an die Gleichung geeignete Vektoren skalar anmultiplizieren.

5. Sei
$$M_a = \begin{pmatrix} 3 & -2a & -3 \\ 2 & 2 & -3a \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem $A_a\vec{x} = \vec{b}$ stets eindeutig lösbar? Berechnen Sie auch die eindeutige Lösung *allgemein* für diese Fälle.

6. Ein Lichtstrahl fällt entlang der Geraden $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,3) + \lambda(2,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, auf die $xy-$ Ebene und wird dort reflektiert. Beschreiben Sie mit einer Parameterdarstellung die Bahn des ausfallenden Strahls.

7. Die Ebene $x + y + z = 1$ wird mit einem Winkel von 30 Grad um die $z-$ Achse gedreht (Entgegen dem Uhrzeigersinn, wenn man von 'oben' (also einem Punkt mit positiver $z-$ Koordinate auf der $z-$ Achse) auf die $xy-$ Ebene schaut. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die resultierende Ebene.

8. Eine Leiter der Länge l steht an eine Wand gelehnt, im Winkel α zum Boden, auf der die Wand senkrecht steht. Auf der Leiter an beliebiger Stelle steht jemand. Es wirkt nur die Gravitationskraft $(0,-g)$. Die Leiter verhalte sich (idealisierend) vollkommen starr. (Man stelle das Problem zweidimensional dar.) Welche Seitenkraft muss die Wand aushalten? Es werde angenommen, dass die Leiter nicht wegrutsche, die kompensierende Reibungskraft also groß genug sei. Man mache insbesondere die Abhängigkeit des Resultates von α und der Leiterposition klar.