

Übung (1)

1. Vereinfachen Sie folgende Rechenausdrücke:

$$\frac{a^3 b^4}{a^5 b^2}, \frac{\frac{x^{-3} y^5}{a^3 b^4}}{\frac{x^2 y^6}{a^7 b^3}} = ? \text{ (Hauptbruchstrich!), } \frac{a^3 b^4}{x^2 y^2 z} + \frac{a^4 b^5}{x^3 y^3 u} - \frac{a^5 b^3}{x^3 y^4 v} \text{ (Ausklammern!),}$$
$$\sqrt[3]{64}, 128^{-1/4}, \sqrt{32}.$$

2. Warum gilt $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$? Sprechen Sie genau aus, welche gültige Umformung hier vorliegt. Führen Sie eine solche Umformung mit $\frac{1}{1-2\sqrt{x}}$ derart durch, dass keine Wurzel mehr im Nenner steht.
3. Es seien a, b, c reellwertige Konstanten. Sagen Sie voraus, welche Endform der Zähler bekommt, wenn man den Ausdruck $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$ auf Hauptnenner bringt. Rechnen Sie die Endform des Zählers zur Übung auch aus.
4. Begründen Sie sorgfältig (Anwendung binomischer Formel!), dass für Zahlen x mit der Eigenschaft $0 < x < 1$ stets gilt: $x^2 < x$.
5. In welche Endform sollte man folgende (Bestimmungs-) Gleichung (mit x, y als Unbestimmten) bringen? (Tun Sie das *im Kopf!*)

$$2(x - y) + 3(3 - 2y) + 4 = 5 + 3x$$

Skizzieren Sie die Lösungsmenge. Geben Sie auch die zugehörige Achsenabschnittsform, und lesen Sie die Achsenabschnitte daraus ab.

6. Wie Aufgabe 4, mit der Gleichung (darin sei nur x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $a(x^2 - 2 + x) - (3 - a)x = 5(x - 2x^2)$. Geben Sie allgemein für a die Lösungsmenge an.
7. Bringen Sie die Parabelgleichung $y = -2x^2 - 3x + 4$ in Scheitelpunktsform, lesen Sie daraus auch die Koordinaten des Scheitelpunktes wirklich ab.
8. Geben Sie die allgemeine Gleichung für alle Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, deren Graphen durch die Punkte $(-2, 1)$ und $(1, 4)$ gehen. Wie viele freie Parameter sollten Sie haben, und wie sind die geometrisch zu deuten?
9. Sie haben sicher bereits die Redeweise gehört oder auch selber verwandt: "Tut man dasselbe auf beiden Seiten einer gültigen Gleichung, so resultiert wieder eine gültige Gleichung". Betrachten Sie die (allgemein-) gültige Gleichung: $\frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$. Nun tun wir auf beiden Seiten dasselbe: Wir ersetzen jedes Minuszeichen durch ein Pluszeichen. Schauen Sie nach, was damit herauskommt, und sehen Sie, dass eine ungültige Gleichung herauskommt. Was für eine allgemeine Regel, die von Gültigem nur zu Gültigem führt, ist denn wirklich gemeint und nur nicht richtig formuliert?
10. Für welche Rechenausdrücke $f(x)$ wird die Gleichung $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ allgemeingültig? (Hinweis: Beobachten Sie, dass ein einziger Funktionswert genügt, um f eindeutig zu bestimmen. - Wie viele freie Parameter haben Sie also für die angesprochene Klasse von Funktionen?)
11. Nehmen Sie für Zahlen $a \in \mathbb{R}$, $0 \neq b \in \mathbb{R}$, die *Definition*: Der Buch $\frac{a}{b}$ ist die (eindeutig bestimmte) Lösung x der Gleichung $xb = a$. Beweisen Sie damit - und mit den üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation, die nicht von Brüchen handeln, dass $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ genau dann gilt, wenn $ad = bc$.

Übung (2)

1. Fassen Sie in der Gleichung $\sqrt{a}(x + \sqrt{a}) = 2x$ zunächst x als Unbestimmte auf und a als äußeren Parameter. Was für eine Gleichung haben Sie damit? Geben Sie die Lösungsmenge an - allgemein für a , denken Sie an etwa notwendige Fallunterscheidungen. Nunmehr lösen Sie die entsprechende Aufgabe mit a als Unbestimmter und x als äußerem Parameter. Schließlich fassen Sie die Gleichung als Gleichung mit zwei Unbestimmten a, x und geben die Lösungsmenge an.
2. c_1, c_2, c_3 mögen Zahlwerte > 0 haben. Um wieviel Prozent und in welcher Richtung verändert sich der Wert von $\frac{c_1^3 \cdot c_2^2}{c_3^4}$, wenn man den Wert von c_1 um 3% erhöht, den von c_2 um 2% senkt und den von c_3 um 4% senkt? Ist die Antwort unabhängig von den Ausgangswerten? Kann man das Resultat im Kopf grob überschlagen?
3. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Was für eine geometrische Schnittaufgabe wird damit gelöst? Wie viele Lösungen hat man also zu erwarten?

4. Wie viele Summanden ergeben sich, wenn man das Produkt $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^m b_j\right)$ ausdistribuiert? Schreiben Sie das Produkt auch mit großem Summenzeichen. Konkretisieren Sie das Ganze mit $n = 3, m = 2$. (Schreiben Sie für diesen Fall alle Summen aus.)
5. Schreiben Sie folgende Summen aus (jeweils wörtlich so, wie sie stehen!):

$$\sum_{i=1}^4 2, \quad \sum_{i=1}^3 (i + i^2), \quad \sum_{i=1}^3 i + \sum_{i=1}^3 i^2, \quad \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^2 (i + 3j)\right), \quad \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{i=1}^3 (i + 3j)\right),$$

und sehen Sie ein, dass und warum die ersten beiden und die letzten beiden jeweils denselben Wert ergeben.

6. Schreiben Sie folgende Summen mittels des großen Summenzeichens:

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{1}{x^5}, \quad 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \frac{x^8}{9} - \frac{x^{10}}{11}$$

7. Stellen Sie sich einen unendlichen Ausdruck der folgenden Art vor:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

- und immer so weiter. Machen Sie daraus eine rekursive Definition einer Zahlenfolge - setzen Sie den Anfang mit $x_1 = 1$ an, und überlegen Sie, gegen welchen Grenzwert diese wohl geht. Überlegen Sie ein kleines Computerprogramm, das Ihnen eine numerische Kontrolle Ihres Resultates erlaubt. Finden Sie damit insbesondere heraus, in welcher Größenordnungen die Differenz zwischen dem Grenzwert und x_{10} sowie Grenzwert und x_{40} liegen.

Übung (3)

1. v und c mögen Werte > 0 haben, stets $v < c$. Für welche Werte von v/c wird $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \frac{1}{100}$?
2. Welche Ordnungsbeziehung können Sie für a^2, b^2 folgern, wenn Sie $a < b$ und $a > 0$ wissen? (Sie dürfen voraussetzen als allgemeingültig: Wenn $a < b$ und $c > 0$, so $ac < bc$.) Welche Beziehung können Sie dagegen für a^3, b^3 folgern, wenn Sie nur $a < b$ voraussetzen? Warum klappt das hier, aber beim Quadrat nicht?
3. Gilt stets $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \max(|a|, |b|)$? (Dabei ist $\max(|a|, |b|)$ einfach das Maximum von $|a|, |b|$. Die umgekehrte Ungleichung gilt offenbar nicht. Formulieren Sie genau, in welchen Spezialfällen Sie ausschließlich gilt, und begründen Sie das. Finden Sie aber eine besonders einfache Funktion f , so dass allgemeingültig wird: $\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(\max(|a|, |b|))$. (Geben Sie also einen entsprechenden Rechenausdruck an.)
4. Sei $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom vom Grade n , also $a_n \neq 0$, mit beliebigem $n > 1$. Die a_i nennt man dabei auch die Koeffizienten. Betrachten Sie nun das Polynom $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Von welchem Grade ist es? Geben Sie eine allgemeine Formel für alle Koeffizienten dieses Polynoms.
5. Führen Sie als Division mit Rest aus: $(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) : (x^2 - 1)$, und schreiben Sie anschließend eine Gleichung der Form $(x^3 - 3x^2 + 2x + 1) = q(x)(x^2 - 1) + r(x)$, wobei q ein Polynom und r eine gebrochen rationale Funktion ist. Denken Sie an 'schriftliches Dividieren' bei ganzen Zahlen, das geht hier genau so: Teilen Sie immer nur durch den leitenden Term - hier x^2 - des Divisors, und ziehen Sie anschließend das Resultat mal Divisor ab von dem, was vom Dividenten noch übrig ist. Es bleibt ein Restpolynom von kleinerem Grad als der Divisor hat.
6. Sie teilen das Intervall $[a, b]$ ($a < b$) in n gleich breite Streifen. Geben Sie eine allgemeine Formel für den i -ten Zwischenpunkt. Geben Sie natürlich dazu auch an, welchen Bereich i zu durchlaufen hat.
7. Teilen Sie das Quadrat aller Punkte (x, y) der Ebene mit $a \leq x \leq b$ und $c \leq y \leq d$ in ein Gitter ein aus m Streifen in Richtung der y - Achse und n Streifen in Richtung der x - Achse. Beschreiben Sie nun alle Gitterpunkte formelmäßig, unter Einbeziehung der Randpunkte.
8. Finden Sie ein rein kombinatorisches Argument dafür, dass für $k \geq 1$ und $n \geq k$, $k, n \in \mathbb{N}$, gilt: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in einem zweidimensionalen kartesischen System den Punkt P mit den Koordinaten $(2, -1)$ ein. Zeichnen Sie nunmehr die Vektoren $\vec{a}_1 = (1, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 2)$ ein, und betrachten Sie diese als Einheitsvektoren eines neuen Koordinatensystems. Lesen Sie die Koordinaten von P in diesem neuen System ab - Skizze!). Prüfen Sie die gefundenen Koordinaten durch kleine Rechnung.
2. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein.
3. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge a liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$. Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der x - Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der z - Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der y - Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.
 - (a) Alle Eckpunkte,
 - (b) die obere Würfelseite,
 - (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,
 - (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseite, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.
4. Wie sieht die Menge aller Punkte in der Ebene aus, deren (kartesische) Koordinatendarstellung (x, y) die Eigenschaft hat: $|x| + |y| \geq 1$?
5. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P und Q , $\vec{x}_P = (2, -4)$, $\vec{x}_Q = (2, 3)$. Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Winkel bildet sie mit der x - Achse?
6. Welches Gebilde wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben? $\vec{x}(t) = (t, 1/t)$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. (Kartesisches System.)
7. Welches geometrische Gebilde im \mathbb{R}^3 wird durch die Bedingung beschrieben, dass $x^2 + y^2 \leq 1$ und $0 \leq z \leq 3$? (Kartesisches System.)
8. Beschreiben Sie in einem zweidimensionalen kartesischen System alle gleichschenkligen Dreiecke, deren in der Länge frei wählbare Seite auf der x - Achse liegt, mit dem einen Eckpunkt im Ursprung, dem andern im positiven Bereich der x - Achse. Der dritte Punkt soll positive y - Koordinate haben. Wie viele freie Parameter haben Sie?
9. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in x - Richtung, großer der Länge 4 in y - Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Lösen Sie allgemein die Gleichung (x Unbestimmte, a äußerer Parameter) $2x^2 + ax - 3 = 0$.
2. Lösen Sie die Gleichung $\frac{1}{1-\sqrt{x}} - \frac{1}{1+\sqrt{x}} = -1$.
3. Schreiben Sie auf, was bei $(a + b)^5$ nach distributivem Ausrechnen herauskommt, indem Sie die Binomialkoeffizienten nutzen.
4. Setzen Sie folgendes Axiom der Struktur der reellen Zahlen voraus: Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ wächst $n\varepsilon$ ($n \in \mathbb{N}$) für $n \rightarrow \infty$ über alle Grenzen. Zeigen Sie nunmehr unter Verwendung der binomischen Formel, dass für $\varepsilon > 0$ die Zahlen $(1 + \varepsilon)^n$ mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ über alle Grenzen wachsen.
5. Sie haben Messwerte im Intervall $[a, b]$, $a < b$. Wie können Sie die durch eine lineare Funktion so transformieren, dass die neuen Werte im Bereich $[0, 1]$ liegen?
6. Seien $\vec{x}_P = (2, 1, -3)$, $\vec{x}_Q = (1, 2, 2)$.
 - (a) Der Punkt R werde dadurch erreicht, dass man von P nach Q geht und dann in derselben Richtung noch einmal so weit. Geben Sie die Koordinatendarstellung für R .
 - (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$.
 - (c) Geben Sie *alle* Parameterdarstellungen für die Gerade durch P und Q , bei denen die Strecke \overline{PQ} in einer Zeiteinheit durchlaufen wird (bei Deutung des freien Parameters als Zeit).
7. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmenge(n), ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g.
 - (a) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, 1 - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.
 - (b) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda) = (3 - 3\lambda, 2 + 2\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - (c) Im \mathbb{R}^2 : $2x = y^2$, $y \in \mathbb{R}$.
 - (d) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = (1, 2) + \lambda(3, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
 - (e) Im \mathbb{R}^2 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1) + \mu(3, 4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$.
 - (f) Im \mathbb{R}^3 : $z = x - y$ und $x \leq 2z + 2y$. (Vereinfachen Sie die Bedingung, dann finden Sie auch leicht heraus, wie das Gebilde aussieht.)
 - (g) Im \mathbb{R}^3 : $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ und $1 \leq z \leq 3$.
 - (h) Im \mathbb{R}^3 : $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2\lambda - 3\mu + 1, 2\lambda + 3\mu - 1, \lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
8. Schneiden Sie alle Geraden in der Ebene, die durch den Punkt $(-1, 0)$ gehen, mit dem Einheitskreis, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt (kartesisches System). Sie finden eine hochinteressante Parametrisierung der Menge aller Kreispunkte außer $(-1, 0)$.