Abschließende Übungen (15)

(1) Geben Sie alle wesentlichen Eigenschaften der Funktion $f(x) = x^2 \ln^2(x)$ (in deren maximalem reellen Definitionsbereich). Fertigen Sie eine grobe Skizze an, und klären Sie mittels der ersten Ableitung quantitativ die Extremwertfrage sowie die Fragen nach dem Verhalten für $x \to 0$ und für $x \to \infty$.

(2) Skizzieren Sie grob den Graphen zu $g(x) = x\sqrt{1-x^2}$ im maximalen reellen Definitionsbereich. Symmetrie? Genaue Lage der Extrema? Steigungen bei null und Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs?

(3) Betrachten Sie die Funktion $h(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{1+x^8}}$. Sie können leicht den Graphen grob skizzieren und sagen, wie viele Nullstellen die Ableitung haben wird. Rechnen Sie die Ableitung aus. Sehen Sie, dass es unmöglich ist, die Nullstellen der Ableitung auszurechnen, sondern nur die Nullstelle ist direkt ablesbar, die wir auch von vornherein gewusst hätten - welche?

(4) Wie lautet die Näherung 1. Ordnung von $\frac{x^4-1}{x^3+1}$ für $x$ in enger Umgebung der Zahl 1?

(5) Berechnen Sie folgende Integrale:
   (a) $\int \tan\left(\frac{x}{3}+\varphi\right) dx$, $\int 2\ln(3t-1)\, dt$ (benutzen Sie die bekannten Stammfunktionen $-\ln|\cos(x)|$ zu tan sowie $x\ln(x) - x$ zu ln)
   (b) $\int \frac{x}{(2x+1)(x+2)} dx$, $\int \frac{x^3}{1+x} dx$ , $\int \frac{x^3}{(x^4-1)^5} dx$,
   (c) $\int x e^{-x} dx$

(6) Einige Anwendungen von Integralen:
   (a) Auf der Strecke $[0, 3\pi/2]$ sei folgende Temperaturverteilung gegeben: An der Stelle $x$ herrsche die Temperatur $T(x) = \cos(x)$. Welche ist die mittlere Temperatur auf der Strecke?
   (b) Stellen Sie sich vor, dass auf der $x-$ Achse im Bereich $[0, 2]$ an jeder Stelle $x$ eine Kraft senkrecht in Richtung des Vektors $(0, -1)$ wirke, deren Betrag von $f(x) = 1 + x^2$ gegeben wird. An welchem Punkt muss man die Strecke $[0, 2]$ unterstützen, damit Gleichgewicht herrscht?
   (c) Geben Sie die mittlere Leistung eines Wechselstroms (auf einer vollen Periode) an, der die Kreisfrequenz $\omega > 0$ hat und bei dem die Spannung $U\sin(\omega t)$ ist und die Stromstärke $I\sin(\omega t + \varphi)$, mit Konstanten $I, U > 0$.
   (d) Sie lassen die Sinuskurve auf $[0, \pi]$ um die $x-$ Achse rotieren. Welches Volumen hat der entstehende Rotationskörper?
   (e) Welche Länge hat die Bahn der Kurve $\vec{x}(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)$, $0 \le t < \infty$?
   (f) Welchen (vektoriellen!) Mittelwert hat $\vec{x}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi$? Deutung?
   (g) Wenn man 10 Poissonereignisse pro Zeiteinheit erwartet, so hat die Zufallsvariable 'benötigte Wartezeit bis zur Beobachtung des Ereignisses' die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(t) = 10e^{-10t}$, $t \ge 0$.
      (i) Zeigen Sie, dass tatsächlich $\int_0^\infty f(t)dt = 1$.
      (ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Wartezeit höchstens $t$? Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man also höchstens ein Zehntel einer Zeiteinheit zu warten bis zum ersten 'Treffer'?

(7) Berechnen Sie (möglichst praktisch) zu $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, -2, 2)$ und $\vec{c} = (-2, 1, 1)$ : $\left|-4(\vec{b} - \vec{a})\right|$, $(-3\vec{a})\left(5\vec{b}\right)$, $\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, $\vec{a}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.

(8) Vereinfachen Sie (allgemeingültig für beliebige $\vec{x}, \vec{y}$): $(\vec{x} - \vec{y})(-3\vec{y} - 4\vec{x})$, $(\vec{x} - \vec{y}) \times (2\vec{y} - 3\vec{x})$.

(9) Berechnen Sie die senkrechte Projektion $\vec{x}$ des Vektors $\vec{b} = (2, 1, 4)$ auf den Vektor $\vec{a} = (3, -1, -2)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms auf folgende Weisen: Über das Vektorprodukt beider Vektoren und über die Grundformel 'Länge der Grundseite ($|\vec{a}|$) mal Betrag der Höhe ($\left|\vec{b} - \vec{x}\right|$). Rechnen Sie nach, dass $\sqrt{\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2}$ herauskommt.

(10) Sei $E$ die Ebene, welche durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$ beschrieben wird. Die Ebene $F$ gehe aus $E$ dadurch hervor, dass $E$ mit dem Vektor $(3, -4, 5)$ parallel verschoben wird. Finden Sie direkt eine Normalenform für $F$. Welchen Abstand hat $F$ vom Koordinatenursprung?

(11) (a) Stellen Sie fest, dass die folgenden Geraden $g$ und $h$ einander nicht schneiden: $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(2, 1, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_h(\alpha) = (1, 2, 2) + \alpha(3, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Welchen Abstand haben die Geraden voneinander? (Berechnen Sie diesen Abstand als Länge eines auf beiden Geraden senkrecht stehenden Vektors, der einen Punkt von $g$ mit einem Punkt von $h$ derart verbindet.)

(c) Welchen Winkel bilden beide Geraden miteinander?

(d) Welchen Abstand hat der Punkt $(1, 2, 2)$ von der Geraden $g$? Berechnen Sie ihn einmal über Vektorrechnung mittels einer senkrechten Projektion, einmal über Extremwertbehandlung im Sinne der Infinitesimalrechnung. (Hinweis: Dabei ist es nützlich, das Quadrat des Abstandes zu betrachten statt den Abstand selbst - warum?)

(12) Berechnen Sie die Lösungsmenge zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie auch den Kern der Matrix (als linearer Abbildung) sowie Dimension von Kern und Bild an, dazu eine Basis für das Bild.

(13) Sei die Ebene $E$ beschrieben durch $x + y + z = 1$. Geben Sie eine Normalenform für die Ebene $F$, die aus $E$ durch Drehung mit $\pi/3$ um die $z-$ Achse entsteht, 'von oben' (d.h. etwa vom Punkt $(0, 0, 1)$ aus gesehen) links herum. (Produzieren Sie die gesuchte Normalenform direkt, überlegen Sie aber auch, wie Sie eine solche Drehung ausführen können, wenn eine Parameterform einer Ebene - oder eines andersartigen geometrischen Gebildes - gegeben ist.)

(14) Sei $\vec{x}(t) = (2, 3, 1) + t(3, 2, -2) + \frac{1}{2}t^2(1, -2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Tangente an die Bahn dieser Kurve im Punkt $\vec{x}(1)$. Zusatzfrage: In welcher Ebene liegt die Bahn der Kurve? Geben Sie für diese Ebene eine Parameterdarstellung.

(15) Berechnen Sie in kartesischer Endform: $z = \frac{1+j}{2-\sqrt{3}j}$. Was sind $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$? (Wie sollte man $|z|$ möglichst praktisch ausrechnen?)

(16) Wie kann man sehr einfach ein regelmäßiges 12-Eck mit Eckpunkten auf dem Einheitskreis angeben?

(17) Berechnen Sie in kartesischer Endform: $z = \frac{1}{je^{j\pi/4}-1}$.