

Übungen zum Wochenende (4)

- (1) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\sin(x + \pi/4)$ für kleine $|x|$.
- (2) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $x + \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ für kleine $|x|$.
- (3) Beschreiben Sie eine gedämpfte Schwingung, deren Amplitude exponentiell abfällt, derart, dass in sie jeweils auf ein Drittel reduziert wird in zwei Zeiteinheiten.
- (4) Überlegen Sie, wie Sie eine Funktion basteln können, deren Graph ein (einstellbar) steil symmetrisch asymptotisch abfallendes Plateau (vorzuschreibender Höhe) bildet, dessen Breite ebenfalls durch einen äußeren Parameter gesteuert sein soll. Die Werte sollen zu beiden Seiten asymptotisch zum Wert Null abfallen, ohne diesen zu erreichen. Hinweis: gehen Sie aus von den Funktionen $f_n(x) = x^{2n}$ im Intervall $[-1, 1]$, für $n \geq 1$.
- (5) Rechnen Sie folgende Integrale aus (verwenden Sie die bekannte Stammfunktion zu \ln).
 - (a) $\int dx \ln(2x - 1)$, $\int \frac{1}{x/2+1} dx$, $\int \frac{1}{(2x-1)^5} dx$,
 - (b) $\int x \ln(x) dx$, $\int e^{-x} \sin(x) dx$ (partielle Integration), $\int 1 \cdot \arctan(x) dx$ (partielle Integration),
 - (c) $\int \frac{1}{(x^2-1)(x-2)} dx$, $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$, $\int \frac{1}{(x^2+1)(x-1)} dx$,
 - (d) $\int x e^{x^2} dx$, $\int x^2 \sqrt{1-x^3} dx$, $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ (Hinweis: Vereinfachen Sie letzteres Integral durch eine lineare Substitution.)
- (6) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$ (beschreiben Sie alle wesentlichen Eigenschaften). Fragen Sie sich auch, wie viele Wendepunkte es nach grober Skizze mindestens geben sollte, und rechnen Sie deren Anzahl und Lage auch aus.
- (7) Eine Bewegung startet im Punkt $(2, 1)$ zur Zeit $t = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit $(1, -1)$. Die Beschleunigung sei zu beliebiger Zeit $t : (t, \sin(t))$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und den Ort zu beliebiger Zeit. Verwenden Sie bestimmte Integrale. Versuchen Sie eine grobe Skizze der Bewegung (der Bahn der Ortskurve).