Übung (12)

(1) Skizzieren Sie grob den Graphen von $f(x) = e^{x^3}$. Berechnen Sie auch die (erste, zunächst nur die!) Ableitung, und stellen Sie wesentliche Eigenschaften des Graphen mit ihrer Hilfe fest. Wozu kann die zweite Ableitung über das Erreichte hinaus noch dienen? Führen Sie das aus.

(2) Diskutieren Sie folgende Schar von Funktionen: $f_c(x) = \frac{x}{1+cx^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Klären Sie alle wesentlichen Fragen allgemein für c (Fallunterscheidung!), insbesondere die Extremwertfrage auch quantitativ. Skizzieren Sie grob je ein Exemplar der auftretenden Typen, und stellen Sie sich auch vor, wie sich ein solches Exemplar bewegt, wenn man den Wert von c bewegt.

(3) Diskutieren Sie: $h(x) = \sqrt[3]{\arctan(x)}$ - maximaler reeller Definitionsbereich? Symmetrie? Was ist qualitativ anders als bei arctan, und was sagt die erste Ableitung? Wo existiert sie nicht, und was ist dort der Fall?

(4) Leiten Sie die komplexwertige Funktion $f(t) = e^{j\omega t}$ (ω ist dabei ein reellwertiger äußerer Parameter und t die unabhängige Variable mit allen reellen Werten) naiv ab, und stellen Sie fest, dass die komponentenweise Ableitung (bei Auffassung von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$) gerade dies Resultat hat.

(5) Sei $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < 0 \\ 1 - \sqrt{1-x^2} \text{ für } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$ Wie sieht der Graph aus? Rechnen Sie nunmehr (getrennt für $x < 0$ und den andern Fall $x \geq 0$) die erste und die zweite Ableitung aus. Ist f in $x = 0$ einmal stetig differenzierbar? Ist f in $x = 0$ zwei mal differenzierbar? (Sie sehen hier, warum man Schienen so nicht verlegt, weil das für die Insassen fürchterlich wäre - da hat man zweimalige stetige Differenzierbarkeit nötig.)

(6) Leiten Sie die Umkehrfunktion arcsin zur Sinusfunktion nach der Regel für Umkehrfunktionen ab.

(7) Rechnen Sie die Ableitung von $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ aus (Endform!).

(8) Geben Sie folgende Grenzwerte an - in welchen Fällen sind die de L'Hospitalsche Regeln anwendbar? (Beachten Sie stets: Nicht etwa nur der Wert, sondern auch die Existenz der folgenden Grenzwerte ist als gegebenes Problem zu nehmen.)

   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}$
   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{(1-x)^2}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
   (d) $\lim_{x\to 0} (x \ln(x))$. (Überlegen Sie, wie man hier zu einem Quotienten kommen kann.)
   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ für $n \geq 1$. (Produzieren Sie ein induktives Argument.)

Übung (13)

(1) Berechnen Sie folgende Ableitungen: $\frac{d}{dt}\arctan(2t-3)$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x^3)^4}$, $\frac{d}{dx}\left(x^2\tan(x)\right)$.

(2) Skizzieren Sie grob die Schar Graphen zu $f_\alpha(x) = \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Wie entwickelt sich die Steigung für $x \to \pm\infty$? Zeigen Sie mittels grober Skizze plus zweiter Ableitung, dass es für $\alpha \neq 0$ genau einen Wendepunkt gibt und wo er liegt.

(3) Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$. Definitionsbereich? Symmetrie? Welche Stelle ist zunächst kritisch? Untersuchen Sie diese (womit könnte man das zweckmäßig tun? Erste Ableitung? Was sagt sie aus? Verhalten für große $|x|$? Nun ist eine grobe Skizze sehr leicht.

(4) Bestimmen Sie für die Flugparabel $\vec{x}(t) = (1,2,2) + t\,(2,-1,3) + \frac{1}{2}t^2\,(3,1,-4)$, $t \in \mathbb{R}$, Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$. Was ist die Besonderheit des Beschleunigungsvektors (für beliebigen Wert von t)? Wie entwickelt sich der Betrag des Geschwindigkeitsvektors mit wachsendem t? Wo liegt der Scheitelpunkt? (Hinweis: Der Scheitelpunkt ist dadurch charakterisiert, dass dort Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor senkrecht aufeinander stehen.)

(5) Welche mittlere Steigung hat die Funktion sin auf $[x, x+k\cdot 2\pi]$, für $x \in \mathbb{R}$, $k \geq 1$, k ganz? Welche mittlere Steigung hat sin auf $[0,\pi/2]$? An welcher Stelle (gibt es nur eine?) dieses Intervalls wird diese mittlere Steigung lokal realisiert?

(6) Es sei die Oberfläche eines Ellipsoiden beschrieben durch $2x^2+3y^2+z^2 = 6$. Geben Sie einen Vektor an, der auf dieser Fläche im Punkt $(1,1,1)$ senkrecht steht. Beschreiben Sie in Normalenform die Tangentialebene an die Fläche im genannten Punkt.

(7) Es sei $f(x,y) = 2xe^y - y^2$. Geben Sie in Näherung 1. Ordnung: $f(1.1, 0.9)$. Wie groß sind absoluter und relativer Fehler?

(8) Zeigen Sie mit dem Satz vom endlichen Zuwachs die Ungleichung $\ln(x) \leq x$ für alle $x \geq 1$. Folgern Sie damit dieselbe Ungleichung auch für $0 < x < 1$, indem Sie die bekannten algebraischen Eigenschaften von ln nutzen.

Übung (14)

(1) Welchen Wert hat $\int_{-1}^{2} 4dx$ unmittelbar anhand der Deutung: Flächeninhalt mit Orientierungsvorzeichen? Wie steht es mit $\int_{2}^{-1} 4dx$? Ebenso: $\int_{-1}^{1} \sin(x)\arctan^2(x)\,dx$.

(2) Berechnen Sie möglichst praktisch $\int_{-1}^{1} x^{2n}dx$, für natürliches $n \geq 0$. Wie entwickelt sich der Wert mit wachsendem n?

(3) Schätzen Sie zunächst den Wert von $\int_0^{0.6} e^{-x^2}dx$ ab, einmal grob mit Rechtecken, dann feiner mit Trapezen - worauf beruht es, dass das mit Trapezen ordentlich möglich ist? Berechnen Sie nunmehr genauere Schranken mit einer Untersumme und einer Obersumme, indem Sie gleichmäßig in Intervalle der Länge 0.2 einteilen. Nun rechnen Sie das Integral auch noch über einen Mittelwert, den sie durch das arithmetische Mittel der Funktionswerte an den Stellen $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.3$, $x_3 = 0.5$ gewinnen. (Vergleichen Sie: $\int_0^{0.6} e^{-x^2}dx = 0.535153\,5$ ist ein sehr genauer numerischer Wert, und man kann das Integral tatsächlich nur näherungsweise rechnen.)

(4) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{1+(2x)^2}$ im Bereich $[1;3]$? Rechnen Sie ihn mittels eines Integrals exakt aus.

(5) Berechnen Sie $\int_0^{\pi/4} \cos(4t)\,dt$, $\int \frac{2}{2x+1}dx$, $\int \frac{\sqrt{2x^4+1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, $\int \left(1-\frac{x}{5}\right)^{30}dx$, $\int \sqrt{2x-1}dx$.

(6) Berechnen Sie über geschicktes Umformen und anschließende Verwendung der $1/\alpha-$ Regel die folgenden Integrale:
   (a) $\int dx \ln\left((3x-1)^5\right)$, $\int dx \cos^2(x)$, $\int \frac{1}{2+3x^2}dx$. (Für das zweite Beispiel: Additionstheoreme!)
   (b) Berechnen Sie durch Umkehrung der Kettenregel, aber bei Schwierigkeiten auch mittels des Substitutionsschemas folgende Integrale: $\int \sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}dx$, $\int x\cos\left(1-x^2\right)dx$.

(7) Berechnen Sie $\int x\sin(x)\,dx$ über partielle Integration.

(8) Sie wissen von einer Funktion $f: f(1) = 2$, und $f'(x) = e^{-2x}$ für alle x. Was ist dann $f(3)$ und allgemein $f(x)$ für beliebigen Wert von x?

(9) Führen Sie mit dem Integral $\int e^{\sqrt{x}}dx$ die Substitution $u = \sqrt{x}$ durch, und rechnen Sie es damit aus.