Aufgaben zum Wochenende (3)

Hinweis: Die ersten drei Aufgaben bilden eine Probeklausur zum derzeitigen Stand des Stoffes. Geben Sie sich dafür vier Stunden Zeit. Zugleich wiederholen Sie damit die Vektorrechnung und die komplexen Zahlen.

1. (a) Es seien gegeben: $\vec{x}_P = (1, 2, -2)$, $\vec{x}_Q = (3, 2, 4)$ und die Ebene E mit $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (2, 1, 1) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(3, 1, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   i. Geben Sie eine Normalenform für E.
   ii. Welchen Schnittpunkt hat die Gerade g durch P und Q mit der Ebene E?
   iii. Welchen Winkel bildet g mit E?
   iv. Spiegeln Sie den Punkt P an E. Hinweis: Rechnen Sie zunächst den Punkt aus, den man durch senkrechte Projektion von P auf E erhält (Skizze!)
   v. Sei $\vec{x}_R = (-1, 4, 2)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte, die von P, Q und R gleich weit entfernt sind.
   vi. *) Parametrisieren Sie den Kreis auf E mit Mittelpunkt R und Radius 4.

   (b) Es sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Prüfen Sie, ob die Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind. Was können Sie nunmehr über die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$ und allgemeiner über die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}$ für beliebigen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sagen? Lösen Sie insbesondere $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) Geben Sie die Zahl $-2\sqrt{3} - 2j$ in exakter Polarform an. Geben Sie in kartesischer Form die Zahl $5e^{-3j\pi/4}$ an.

   (b) Lösen Sie folgende Gleichung in $\mathbb{C}$: $\frac{1-jz}{2-3z} = 1 - j$. Warum ist die Gleichung eindeutig lösbar? (Geben Sie das Resultat in kartesischer Endform an.)

   (c) Was ist die Lösungsmenge der folgenden Gleichung in $\mathbb{C}$? $z(\overline{z} - 1) = z - j$. Hinweis: Setzen Sie z in kartesischer Form an.

3. (a) Wie können Sie den Graphen von $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ elementar konstruieren? Geben Sie eine grobe Skizze. (Überlegen Sie: Definitionsbereich, Symmetrie(?), Vorzeichen, Dominanz der Teilausdrücke wo jeweils, Nullstellen?) Geben Sie einen Rechenausdruck an für die Funktion g, deren Graph aus dem von f entsteht durch: 1.) Stauchen längs der $x-$ Achse ($y-$ Achse festlassend) mit Faktor 3, 2.) Verschieben um 5 nach rechts längs der $x-$ Achse, 3.) Verschieben um 4 in Positivrichtung der $y-$ Achse, also 'nach oben'.

   (b) Geben Sie eine grobe Skizze für den Graphen von $g(x) = e^{\tan(x)}$. (Beantworten Sie verbal folgende Fragen: Maximaler reeller Definitionsbereich? Symmetrien? Vorzeichen? Extrema? Monotonie (stückweise)? Verhalten in kleiner Umgebung besonderer Stellen?)

   (c) Bilden Sie $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$.

   (d) Schreiben Sie $h(x) = 2\cos(x) - 3\sin(x)$ als linear transformierte Sinusfunktion. Geben Sie dann die Abszissenwerte aller lokalen Maxima von f an.

   (e) Es sei f global streng monoton steigend, g global streng monoton fallend. Welche Eigenschaft folgt daraus für $g \circ f$? Weisen Sie die nach.

4. Schreiben Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = x^4$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.

5. Warum ist für sehr kleine $|\varepsilon| > 0$ der Wert von $(1 + \varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$?

6. Was ist näherungsweise $\tan(x)$ für kleine $|x|$?

7. Es sei $M > 0$ eine sehr große Zahl. Ferner sei $\varepsilon > 0$ eine vorgelegte sehr kleine Zahl. Was ist dann der kleinste natürliche Exponent n, so dass $(1+\varepsilon)^n > M$? Wie sieht das aus speziell für $M = 10^{10}$ und $\varepsilon = 10^{-10}$?

8. Berechnen Sie folgende Ableitungen:

   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x - 2\sqrt{x^{\sqrt{2}}} + x^{-\pi-1} + \ln(x) - 3\cos(x)\right)$

   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-5x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}(-2x-1)^3$

   (c) $\frac{d}{dx}(e^x \tan(x))$ (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)

   (d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(2x)}{1-\tan(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(-2x+1)^5}}$, $\frac{d}{dx}\frac{x^3}{\sin(2)}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?

   (e) $\frac{d}{dx}\left(x - x^3\right)^4$ (Kettenregel, nicht ausmultiplizieren!)

   (f) $\frac{d}{dx}\frac{x^2}{\sqrt{2x^3-3}}$

   (g) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x^3}{(x-\alpha)^3(x-3)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)

   (h) $\frac{d}{dx}\log_a(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ ($a > 0$ in beiden Fällen)

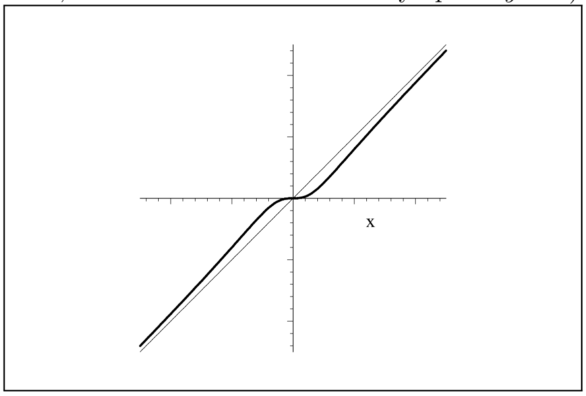
9. Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = \ln^4(x)$ für $x \to \infty$? Was bedeutet das graphisch?

10. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ für den Ausdruck $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. Wie groß ist der relative Fehler bei entsprechender Näherung von $f(-0.1)$?

11. Zeigen Sie, dass die Kurve $\vec{x}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, die $x-$ Achse stets im selben Winkel schneidet (für welche Werte von t geschieht das, und wie groß ist der Winkel?).

12. Welche (Nichtstandard-) Symmetrie hat der Graph zu $f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$? (Geben Sie eine linear transformierte zu f an, welche Standard-Symmetrie besitzt.) Skizzieren Sie auch grob den Graphen von f. Beantworten Sie die Frage nach Extrema qualitativ und auch quantitativ. (Kommen Sie mit der ersten Ableitung aus!)

13. Geben Sie eine möglichst einfache gebrochen rationale Funktion an, deren Graph etwa so aussieht (wesentliche Eigenschaften: Symmetrie, Verhalten um $x = 0$ und Asymptote $y = x$):



Überlegen Sie auch, warum sich eine solche Figur nicht mit einem Polynom erzeugen lässt.