Übung (9)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Sei die Ebene E gegeben durch $\vec{x}_E\,(\lambda,\mu) = (1,2,0) + \lambda\,(1,2,-2) + \mu\,(2,1,3)\,,\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie zur Ebene E eine Normalenform - nutzen Sie natürlich jetzt das Vektorprodukt.

2. Berechnen Sie zu $\vec{a} = (-1,2,2)$ und $\vec{b} = (3,2,-1)\,,\ \vec{c} = (-2,3,-1)$: $\frac{1}{2}\vec{a} \times \frac{4}{3}\vec{b}$, $\vec{c}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$, $2\vec{b}\,(3\vec{a} \times (-4\vec{c}))$. (Rechnen Sie so wenig wie möglich unter Nutzung der bekannten Eigenschaften von Vektor- und Spatprodukt.)

3. Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ein fester Vektor. Geben Sie die Matrix an zur linearen Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$. Welche Dimension hat der Kern dieser Abbildung? (Fallunterscheidung!) Geben Sie auch jeweils eine Basis für den Kern an. Aus welchen Vektoren besteht das Bild der Abbildung? Welche Dimension hat es?

4. Welche wesentliche algebraische Eigenschaft hat die Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \mapsto \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$? Weisen Sie diese durch Rechnung nach, indem Sie die bekannten Eigenschaften des Vektorproduktes nutzen.

5. Sei E die Ebene $2x + y + z = 1$. Sei $g > 0$. Zerlegen Sie den Vektor $(0,0,-g)$ als Summe eines Vektors parallel zu E und eines Vektors senkrecht zu E. In welcher Richtung würde also ein Körper auf dieser 'schiefen Ebene' bei Vorliegen nur des angegebenen Schwerkraftvektors rutschen?

6. Rechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix über 'Nullen Schaffen' aus, auch noch einmal als Spatprodukt. Welche Information gibt Ihnen diese Zahl?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. (Für freie Kapazitäten:) Zwei (masselos und als bloße Strecken gedachte) Stäbe der Längen $l_1 > 0$, $l_2 > 0$ seien starr verbunden, so dass sie einen Winkel $\alpha > 0$, $\alpha < \pi$, miteinender bilden. Das ganze Zweibein sei (reibungsfrei) genau im Knickpunkt aufgehängt. Setzen Sie den Stab der Länge l_1 links an, den andern rechts, beide nach unten hängend. Legen Sie den Koordinatenursprung in den Drehpunkt. Am Stab der Länge l_i hänge jeweils eine Masse $m_i > 0$, $1 \leq i \leq 2$, so dass also am Endpunkt des linken Stabes die Kraft $(0, -m_1 g, 0)$ wirke (g die Erdbeschleunigung als Skalar). Welchen Winkel muss der linke Stab mit der $x-$ Achse bilden, damit Gleichgewicht herrscht? Prüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie nachschauen, dass für den Spezialfall $l_1 = l_2$, $m_1 = m_2$ das offensichtliche Resultat erscheint.

Übung (10)

1. Was sind Realteil und Imaginärteil von $3 - 4j$? Was sind Realteil und Imaginärteil von $2e^{-jt}$ für reellen Wert von t?
2. Drücken Sie $z + \overline{z}$ sowie $z - \overline{z}$ aus durch $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$. Skizzieren Sie die Sache auch.
3. Skizzieren Sie folgende komplexen Zahlen in der komplexen Ebene:
$$2 - 3j,\ \overline{2 - 3j},\ e^{-j\pi\cdot 5/3},\ 2e^{7j\pi/6}.$$
Geben Sie zu den beiden Zahlen in Polarform die exakten (!) kartesischen Formen. Was sind die Beträge der Zahlen (im Kopf!)?
4. Sei $z = \frac{-2-5j}{5-2j}$. Können Sie ('im Kopf') sagen, was die Werte sind von $|z|$, $|\overline{z}|$, $\left|\frac{1}{\overline{z}}\right|$, $\left|z^2\right|$? Berechnen Sie auch die kartesische Endform von z.
5. Berechnen Sie $(-3 - 2j)^2$. Wie kann man nun das Resultat von $(-3 + 2j)^2$ voraussagen?
6. Welche exakte Polarform hat $z_1 = -1 - \sqrt{3}j$? Dagegen: Welche exakte (!) Polarform können Sie allenfalls für $-2 - 3j$ angeben? Woran liegt das?
7. Wie lautet die konjugierte Zahl zu $z = 4e^{-j\pi/3}$ und allgemein zu $re^{-j\alpha}$ mit reellem Wert von α? (Geben Sie möglichst verschiedene Argumente in wohlgesetzten Worten, die das Resultat sofort klären.)
8. Welche komplexen Zahlen $z \neq 0$ erfüllen die Gleichung $z^3 = -z$?
9. Was ist j^n für beliebige natürliche Zahl n?
10. Schreiben Sie die Kurve $z(\omega) = R + j\omega L$, $\omega \geq 0$, mit reellen Parametern $R > 0$, $L > 0$, als Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$, und skizzieren Sie die Bahn.
11. (Wenn noch Zeit ist: Wie sieht (grob) die Kurve $z(t) = e^t e^{jt}$ aus, $t \in \mathbb{R}$?

Übung (11)

1. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die folgende Gleichung: $\frac{2-jz}{1+jz} = 3 - j$.
2. Welches sind alle komplexen vierten Wurzeln aus -1? Skizzieren Sie diese, und geben Sie auch die kartesischen Formen an. Welcher Satz wird mit der Lage dieser Wurzeln illustriert?
3. Sei $z = 3e^{-3j\pi/4}$. Berechnen Sie die Zahl z^7 (Endform in Polarkoordinaten und in kartesischen Koordinaten!).
4. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 - 2jz + 1 = 0$. Warum war das leicht? Lösen Sie auch $z^2 - 2jz + 1 + j = 0$.
5. Berechnen Sie die kartesische Endform (R, L, ω sind reell und alle größer als Null) von
$$\frac{1}{\frac{1}{R+1/(j\omega C)} + \frac{1}{j\omega L}}.$$
Überlegen Sie auch, von welcher Schaltung hier der Gesamtwiderstand dargestellt wird. Prüfen Sie Ihr Rechenergebnis auch für die Randfälle $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$. Denken Sie auch an Einheitenkontrolle.
6. Schreiben Sie die Funktion $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ als linear transformierte Sinusfunktion. Nutzen Sie dabei die Additionstheoreme.
7. Geben Sie *alle* Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2\sin(3x - 1)$ (in parametrisierter Form). Was sollte man überlegen, um schnell den Graphen zu zeichnen, unter Markierung der wichtigsten quantitativen Eigenschaften?

Übung (12)

1. Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^3)$, $x^2\sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien ausdrücklich fest.

2. Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von f liegt spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = c$'..

3. Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

4. Eine zeitabhängige Größe q hat zur Zeit t_0 den Wert 0, und ihre Werte gehen für $x \to \infty$ nach $M > 0$, so dass sich der Abstand zu M in einer Zeiteinheit halbiert. Beschreiben Sie $q(t)$ durch eine geeignet modifizierte Exponentialfunktion.

5. Wie lang müssen Sie warten, bis eine radioaktive Strahlung auf ein Hundertstel abklingt, bei einer Halbwertszeit von 1000 Jahren?

6. Lösen Sie die Gleichungen $5^{4x-1} = 10$ und $\log_3(x) = 15$.

7. Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an. Nutzen Sie das elementare Graphenkonstruieren aus bereits vorhandenen Grundgraphen. Vergessen Sie auch nicht, sofort nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen. Fragen Sie insbesondere nach dem Verhalten für $x \to \pm\infty$. Und vor allem: Kommen Sie ohne die Ableitungen aus und sehen Sie die Stellen, an denen man diese doch vielleicht gern benutzen würde.

   (a) $f(x) = -xe^x$ - sagen Sie etwas Qualitatives zur Existenz von Extrema und Wendepunkten.

   (b) $g(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$ (Asymptotisches Verhalten (durch eine einfachere Funktion dargestellt, nicht immer nur eine Gerade) für $x \to \infty$?)

   (c) $h_1(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$, $h_2(x) = \frac{x^3}{1-x^3}$, $h_3(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$

8. Wie können Sie arctan linear so transformieren, dass die resultierende Funktion ihre Werte zwischen 0 und 1 hat und an beliebig vorgeschriebener Stelle $\alpha \in \mathbb{R}$ ihre größte Steigung besitzt sowie noch einen äußeren Parameter hat, der die Steilheit reguliert. Wie kann man damit die Funktion, die konstanten Wert Null hat für $x < \alpha$ und konstanten Wert 1 für $x \geq \alpha$ durch eine stetige (und sogar differenzierbare) Funktion beliebig gut nähern?