Übung (5)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge formal aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 2u - 2v &= 0 \\ 2x + \quad y - 2u + v &= 1 \\ 2x \quad - y - u + 2v &= 0 \end{aligned}\ .$$

2. Zwei Ebenen im E^3 sei bezüglich eines Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y + z &= 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{5}z &= 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Worin schneiden sich die Ebenen? Kann man auch hier bereits die Struktur der Lösungsmenge sofort voraussagen?

3. Seien die Ebenen F und H parametrisiert durch $\vec{x}_F(\alpha,\beta) = \alpha(1,2,1) + \beta(2,1,-1)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_H(\lambda,\mu) = (1,2,2) + \lambda(-2,3,1) + \mu(1,1,-1)$, $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Schneiden Sie F mit H. Überlegen und formulieren Sie allgemein, was zu tun wäre, wenn zwei Ebenen zu schneiden wären, von denen eine in Parameterform und die andere in Gleichungsform gegeben wäre. Schreiben Sie auf: E_1 sei gegeben durch $ax + by + c = d$ ($(a,b,c) \neq \vec{0}$), E_2 sei gegeben durch $\vec{x}_{E_2}(\lambda,\mu) = (1,2,2) + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\vec{a},\vec{b}$ nicht parallel und beide nicht Null. Wie geht es nun weiter?

4. Formulieren Sie sorgfältig allgemein (unter Verwendung äußerer Parameter) folgende zwei Aufgaben: 1.) Schnitt zweier (beliebiger!) Geraden im E^2. 2.) Zwei (punktförmig gedachte) Teilchen bewegen sich in der Ebene E^2 mit konstanten Geschwindigkeiten, befinden sich zur Zeit $t = 0$ an gewissen Orten, und die Frage ist, ob sie für einen Zeitpunkt $t > 0$ zusammenstoßen, und wenn ja, zu welchem Zeitpunkt. (Wenn Sie noch Zeit übrig haben, so lösen Sie auch beide Aufgaben allgemein.)

5. Sei $\vec{x}_P = (3,2,1)$, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,2) + \lambda(2,-1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Auf der Ebene E liegt die Gerade g und der Punkt P. Warum ist E mit dieser Bedingung eindeutig bestimmt? Geben Sie eine Parameterdarstellung für E.

6. Was für eine Bewegung wird beschrieben durch $\vec{x}(t) = \vec{x}_P + \vec{a}t^2$, $t \in \mathbb{R}$, mit konstantem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$? Wie sieht das aus bei $\vec{y}(t) = \vec{x}_P + \vec{a}t^3$, $t \in \mathbb{R}$? Hinweis: Vergleichen Sie mit einer zugehörigen Geradenparametrisierung.

7. Ein Teilchen bewegt sich im E^2 (verwenden Sie ein kartesisches System dafür) auf der $x-$ Achse so, dass es zur Zeit $t = 0$ im Ursprung ist, dann mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$ in Positivrichtung der $x-$ Achse läuft. Beschreiben Sie die Bewegung dieses Teilchens in der Zeit (Koordinatenform). Ein anderes Teilchen sei zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(0,-2)$ und bewege sich (ebenfalls geradlinig) mit konstanter Geschwindigkeit $w > 0$. Wie groß muss w sein, damit es das erste treffen kann, und in welcher Richtung (geeignete Beschreibung?) muss es abfliegen? Zu welchem Zeitpunkt trifft es dann auf das erste? Überlegen Sie auch, dass man die Bedingung für w und den Winkel elementar direkt bestimmen kann, ohne Vektorrechnung anzuwenden.

Übung (6)

1. Ein Stab der Höhe 1 läuft senkrecht auf der $xy-$ Ebene stehend über den Einheitskreis in dieser Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Im Punkt $(0, 2, 3)$ befinde sich eine punktförmige Lichtquelle. Wie sieht die Bahn des Schattens vom oberen Endpunkt des Stabes aus, den die Lichtquelle auf die $xy-$ Ebene wirft? (Parametrisieren Sie zunächst die Bahn des oberen Stabendpunktes.)

2. Sei die Ebene E gegeben durch die Gleichung $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = \lambda(1, 2, -1) + \mu(-1, 1, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Denken Sie sich E als undurchsichtig. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 2)$, $\vec{x}_Q = (2, -1, 1)$. Kann man Q von P aus sehen?

3. Wie können Sie sofort feststellen, ob zwei mit Parameterdarstellungen gegebene Geraden parallel sind?

4. Sei die Ebene E gegeben durch $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (1, 2, -1) + \lambda(2, 1, 1) + \mu(3, -1, 2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene F, die parallel zu E liegt und auf welcher der Punkt P liegt, $\vec{x}_P = (1, 3, 2)$. Stellen Sie auch fest, ob E und F nicht etwa zusammenfallen. Sei $\vec{x}_H(\alpha, \beta) = \alpha(-1, 2, -1) + \beta(1, 3, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob die Ebene H parallel zu E liegt.

5. In den Punkten P, Q, R mit den Ortsvektoren $\vec{x}_P = (0, 0, 0)$, $\vec{x}_Q = (-2, 1, -4)$, $\vec{x}_R = (3, -2, 1)$, liegen Massen $m_P = 1$, $m_Q = 2$, $m_R = 3$. Geben Sie den Schwerpunkt des Systems dieser vier Massenpunkte an.

6. Die Punkte A, B, C mögen nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte im Dreieck ABC, unter Verwendung von $\vec{x}_A, \vec{x}_B, \vec{x}_C$. Versuchen Sie, die Sache auf eine beliebige endliche Punktezahl auszudehnen.

7. Überlegen Sie, wie Sie den Schatten eines Würfels bestimmen können, der etwa von parallel einfallenden Sonnenstrahlen auf die $xy-$ Ebene geworfen wird, wenn Sie die Eckpunkte des Würfel (durch ihre Ortsvektoren) kennen. (Was hat das mit der vorigen Aufgabe zu tun?)

Übung (7)

1. Zeigen Sie, dass in folgender Matrix die Zeilenvektoren linear abhängig sind: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, versuchen Sie, 'mit bloßem Auge' den dritten Zeilenvektor als Linearkombination der ersten beiden darzustellen, sonst rechnen Sie eine solche eben aus. Geben Sie nunmehr einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass das System $B\vec{x} = \vec{b}$ jedenfalls unlösbar ist. Geben Sie zwei Vektoren an, deren Linearkombinationen alle Vektoren im Bild von B ergeben, also alle Vektoren $B\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

2. Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Was wissen Sie nunmehr über die Spaltenvektoren von A / über die Zeilenvektoren von A / über die Lösungsmengen von Systemen $A\vec{x} = \vec{b}$ mit beliebigem Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$? Verwenden Sie nun auch noch einmal die schnellere Methode, die lineare Unabhängigkeit der Spaltenvektoren von A nachzuweisen. Kann $A\vec{x} = A\vec{y}$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ gelten?

3. Es sei $\vec{f}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, und es gelte $\vec{f}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie aus, was $\vec{f}(\vec{e}_1)$ und $\vec{f}(\vec{e}_2)$ sein müssen. Hinweis: Stellen Sie $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ als Linearkombinationen von $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar, und nutzen Sie dann die Linearität von $\vec{f}$. Geben Sie nunmehr $\vec{f}$ als Matrix an, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie diese Matrix A auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ anwenden. Geben Sie nunmehr auch eine Matrix B an, so dass $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wieso läuft das ganz ähnlich wie die zuerst gestellte Aufgabe? Wie können Sie prüfen, dass Sie B richtig ausgerechnet haben?

4. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 30 Grad im Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: Benutzen Sie $\sin(\pi/6) = \frac{1}{2}$. Dann können Sie den benötigten Cosinuswert leicht ermitteln.

5. Stellen Sie fest, ob folgende Abbildungen linear sind, und geben Sie im positiven Falle die Matrix dazu an:

   (a) $\vec{f}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Spiegelung am Ursprung im $\mathbb{R}^2$.

   (c) Drehung im $\mathbb{R}^2$ mit Winkel 45 Grad entgegen dem Uhrzeigersinn, aber Drehung nicht um den Ursprung, sondern um den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Übung (8)

Hinweis: Alle im Zusammenhang mit Längen und Winkeln auftretenden Koordinatensysteme werden als kartesisch vorausgesetzt.

1. Begründen Sie, dass $\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$. Geben Sie einen Vektor der Länge 2 in Richtung des Vektors $(1,-1)$ an.

2. Seien $\vec{x}_P = (1,-2,3)$, $\vec{x}_Q = (2,1,-1)$. Was ist der Abstand zwischen P und Q?

3. Wie kann man zu einem Vektor $(1,2,3)$ schnell einen möglichst einfachen senkrechten angeben? Geben Sie nunmehr aber auch in parametrisierter Koordinatenform alle Vektoren an, die auf $(1,2,3)$ senkrecht stehen.

4. Welche Steigung hat jede zur Geraden $y = \frac{1}{2}x + 2$ senkrechte Gerade im E^2? (Hinweis: Machen Sie das mit Richtungsvektoren.)

5. Rechnen Sie schnell im Kopf folgende Skalarprodukte aus:
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3a \\ 3b \\ 6 \end{pmatrix}$$

6. Kann man den allgemeinen Ausdruck $\frac{(\vec{a}\vec{b})^2}{\vec{a}^2\vec{b}^2}$ vereinfachen? Kann man den Ausdruck $\left|\frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a}\right|$ vereinfachen? (Wenn ja, mit welchen Schritten genau?) Kann man $\frac{|\vec{a}|^4\vec{a}\vec{b}}{\vec{b}^2\vec{a}^2}$ vereinfachen?

7. (a) Multiplizieren Sie aus: $\left(\frac{1}{3}\vec{x} - 2\vec{y}\right)^2$.

   (b) Was kommt bei $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$ heraus, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen? Welchen geometrischen Satz drückt das Resultat aus?

   (c) Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängige Vektoren. Ferner sei $\vec{x}$ ein Vektor mit der Eigenschaft: $\vec{x}\vec{a} = \vec{x}\vec{b} = \vec{x}\vec{c} = 0$. Zeigen Sie: $\vec{x} = \vec{0}$.

8. Seien $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,3) + \lambda(1,2,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $\vec{x}_h(\mu) = (2,-3,4) + \mu(2,1,-1)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Welchen Winkel bildet die Gerade g mit der Geraden h? (Ist es für den Sinn der Frage nötig, dass die Geraden einander schneiden?)

9. Welchen Winkel bildet der Vektor $(1,2,3)$ mit der $xz-$ Ebene? Wie kann man also den Winkel zwischen einer Geraden und der $xz-$ Ebene ausrechnen, wenn man eine Parameterform für diese Gerade kennt?

10. Zeigen Sie: In einem nicht ausgearteten Parallelogramm (also mit zwei linear unabhängigen Kantenvektoren gebildet) stehen die Diagonalen genau dann senkrecht aufeinander, wenn das Parallelogramm eine Raute ist, also die Seiten gleiche Länge haben. Hinweis: Beschreiben Sie die Diagonalen einfach durch freie Vektoren, nicht als Strecken.

Aufgaben zum Wochenende (2)

1. Bilden Sie zu $\vec{a} = (1,2,2)$ und $\vec{b} = (2,1,-1)$: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$, $\left|2\vec{a}-2\vec{b}\right|$, $\left(2\vec{a}-2\vec{b}\right)^2$, $\left|2\vec{a}-2\vec{b}\right|^2$. Achten Sie darauf, möglichst wenig zu rechnen und stark die Beziehungen zu nutzen. Bilden Sie $\vec{a}\times\vec{b}$, $-3\vec{b}\times 4\vec{b}$, $-3\vec{b}\times\vec{a}$, $\vec{a}\times\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$. Beachten Sie wieder die Beziehungen - nur das erste Vektorprodukt müssen Sie als solches ausrechnen.

2. Es seien $\vec{x}_P = (1,2,2)$, $\vec{x}_Q = (3,1,-1)$, $\vec{x}_R = (2,1,-2)$. Betrachten Sie das Dreieck PQR.

   (a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks? (Hinweis: Nutzen Sie ein Vektorprodukt.)

   (b) Welchen Winkel hat das Dreieck im Punkt P?

   (c) Welchen Abstand hat P von der Geraden durch Q und R?

   (d) Geben Sie eine Parametrisierung der Geraden durch P, welche den Dreieckswinkel in P halbiert. Hinweis: Bilden Sie zwei gleich lange Schenkel in den Richtungen der von P ausgehenden Seiten, dann finden Sie leicht einen geeigneten Richtungsvektor.

3. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $x - 2y + z = 1$.

   (a) Wie lauten die Achsenabschnitte dieser Ebene?

   (b) Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der senkrecht auf E steht.

   (c) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?

   (d) Welchen Abstand hat E vom Punkt P, $\vec{x}_P = (1,2,3)$?

   (e) Welchen Abstand hat E von der Ebene F, die durch $-2x + 4y - 2z = 10$ beschrieben ist?

   (f) Wie kann man von einer Geraden g mit Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_Q + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit beliebigem Orts- und Richtungsvektor, feststellen, ob g auf E liegt? Lösen Sie das Problem allgemein.

4. Rechnen Sie mittels der senkrechten Projektion den Flächeninhalt F des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms aus. Rechnen Sie nach, dass $F^2 = \vec{a}^2 b^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$ gilt.

5. Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 2z + 3u &= 1 \\ 3x + 2y + 3z - 2u &= 2 \end{aligned} .$$

   (a) Wie lautet die zugehörige Matrix?

   (b) Was können Sie über die Lösungsmenge des Systems sofort nach Inspektion der Matrix sagen?

   (c) Lösen Sie das Gleichungssystem (Lösungsmenge in Parameterform!).

6. Hier noch eine einfache Parametrisierungsaufgabe: Parametrisieren Sie einen Viertelstab (Querschnitt ist also eine Viertelkreisfläche) als dreidimensionalen Körper. (Führen Sie geeignete äußere Parameter ein.)

7. Nun noch eine schwierigere Parametrisierungsaufgabe: Im E^2 sei der Kreis um den Ursprung mit Radius R gegeben. Außen daran liegt zur Zeit $t = 0$ ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt in kartesischer Darstellung $(R + r, 0)$. Der Punkt P auf diesem Kreis habe die kartesische Darstellung $(R + 2r, 0)$. Nun rolle der äußere Kreis (ohne zu rutschen) auf dem anderen (fixiert bleibenden) ab, so dass der Mittelpunkt des außen abrollenden Kreises zur Zeit $t \geq 0$ in $((R + r)\cos t, (R + r)\sin t)$ liege. Beschreiben Sie die Bewegung des auf dem kleinen Kreis fixierten Punktes P, also dessen Ort zu beliebiger Zeit $t \geq 0$.