Übung (1)

1. Formulieren Sie in Worten genau die Kürzungs- bzw. Erweiterungregel für Brüche. (Welche einheitliche Formulierung reicht für beide Fälle?)

2. Wie vereinfacht man zweckmäßig den Ausdruck
$$\frac{\frac{1}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{a}{c}}?$$
(Was sollte die Endform sein, und wie gelangt man am besten dahin?)

3. Geben Sie die (exakten!) Endform der Ausdrücke $\frac{1}{\sqrt{27}}$, $8^{-\frac{2}{3}}$.

4. Erweitern Sie den Ausdruck $\frac{1}{1-2\sqrt{x}}$ mit $1+2\sqrt{x}$. Was passiert?

5. Bringen Sie den Ausdruck $\frac{\sqrt{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{1+\sqrt{x+1}}$ in Endform (also ohne Doppelbrüche). Für welchen Wert von x erhält der Ausdruck den Wert Null?

6. Klammern Sie $\frac{ab}{c^2}$ aus dem Ausdruck $\frac{a^3b^2}{c^3}-\frac{ab}{c}$ aus. (Zum Teil muss das 'gewaltsam' geschehen.)

7. Die Gerade g geht durch die Punkte $(1,3)$ und $(-4,2)$. Beschreiben Sie die Gerade in folgenden beiden Formen: $y = mx+b$, $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1$. Gehen Sie jedoch direkt über die Zwei-Punkte-Form (lösen Sie also nicht ein lineares Gleichungssystem, um m, b auszurechnen).

8. Bringen Sie die Gleichung $y = 3x^2 - x - 1$ in die Formen $y = A(x-\alpha)(x-\beta)$ sowie $y = B(x-c)^2+d$. (Berechnen Sie also $A, \alpha, \beta, B, c, d$.) Lesen Sie aus der zweiten Form auch wirklich die Koordinaten des Scheitelpunktes ab.

9. Es sei die Gerade g beschrieben durch $y = 2x+3$. Wie lautet die Gleichung für die Gerade h, welche durch Spiegelung von g an der Geraden $y = x$ entsteht? (Hinweis: Sie können einen Punkt und die Steigung von h sofort angeben und Punkt-Richtungsform verwenden, aber es gibt auch einen anderen Weg.)

10. Schreiben Sie die Gleichung $2x^2+3y^2=5$ in der Form $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$ (dann wissen Sie, dass die Gleichung eine Ellipse mit Halbachsenlängen a in $x-$ Richtung und b in $y-$ Richtung mit Mittelpunkt im Ursprung darstellt).

11. Nehmen Sie folgende Definition des Bruchs $\frac{a}{b}$ für beliebige $b \neq 0$ und beliebige Zahlen a: $\frac{a}{b}$ ist die eindeutig bestimmte Zahl x, für die gilt: $xb = a$. Leiten Sie daraus die Regel für das Addieren von Brüchen her: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ $(b, d \neq 0)$. Hinweis zur Ausführung: Setzen Sie $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$, und nutzen Sie die definierende Eigenschaft von beiden. Anschließend zeigen Sie damit, dass $x+y$ die definierende Eigenschaft des Bruches $\frac{ad+bc}{bd}$ besitzt. Beachten Sie: Es dürfen nicht etwa Bruchrechenregeln verwandt werden, sondern nur die Grundregeln des Rechnens mit reellen Zahlen. Machen Sie sich bewusst, welche Sie im Einzelnen benutzen. Sie werden noch eine weitere (aus den Grundgesetzen herzuleitende) Tatsache benötigen - welche?

Übung (2)

1. Lösen Sie die Gleichung $3x^2 + ax + 1 = 0$ (a äußerer Parameter, x Unbestimmte), d.h. geben Sie allgemein für jeden Wert von a die Lösungsmenge an (Fallunterscheidung!). Geben Sie nunmehr auch die Lösungsmenge der Gleichung an, indem Sie a und x als zwei Unbestimmte auffassen.

2. Drücken Sie den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{123}$ (also 0.123123123...) als Bruch aus. Hinweis: Stellen Sie eine Beziehung zwischen $x = 0.\overline{123}$ und $1000 \cdot x$ her, und lösen Sie die entstehende Gleichung. Klassifizieren Sie auch diese Gleichung.

3. Geben Sie eine lineare Funktion f an, mit der Sie das Intervall $[-100, 1000]$ unter Erhaltung der Ordnung auf das Intervall $[0, 1]$ abbilden.

4. Beschreiben Sie alle Parabeln der Form $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, deren Achse die Gerade $x = 2$ ist. Wie viele freie Parameter verbleiben, und was ist deren geometrische Bedeutung?

5. Klassifizieren Sie folgende Rechenausdrücke (Terme), einmal als Ausdrücke in x (y dabei als Konstante aufgefasst), dann in y (x dabei als Konstante aufgefasst), schließlich in beiden:

$$
\begin{aligned}
&2x - 3y + 1 \\
&2x - 3xy \\
&\frac{x-2}{x^2+1} + y \\
&x + \sqrt{x+1} - y^{-\frac{2}{3}} \\
&x \sin(y)
\end{aligned}
$$

6. Schreiben Sie das allgemeine Polynom in x, y zweiten Grades auf, einmal als ausgeschriebene Summe und einmal mit großem Summenzeichen. Schreiben Sie auch das allgemeine Polynom 2. Grades in x, y auf, das symmetrisch in x, y ist, also gleich bleibt, wenn man x und y vertauscht.

7. Schreiben Sie folgende Summe aus: $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^{2k+1}$. Welcher Klasse gehört dieser Ausdruck an?

8. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:

$$\frac{1}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{8} - \frac{x^9}{10} + \frac{x^{12}}{12} - \frac{x^{15}}{14}$$

9. Wie lautet der Koeffizient zu x^3y^5, wenn man $(x+y)^8$ ausmultipliziert?

   (a) Den absoluten Fehler einer Messung einer Größe gibt man so an: Wahrer Wert der Größe minus Messwert. Der relative Fehler ist der Quotient: Absoluter Fehler geteilt durch wahren Wert (der dafür nicht Null sein darf). Bezeichnen wir den relativen Fehler mit r_w. In Ermangelung des wahren Wertes bildet man auch den relativen Fehler r_m, worin der Messwert anstelle des wahren Wertes in den Nenner gesetzt ist.

   (b) Statt ideal korrekt 5m misst man 5.001 m. Wie groß ist der relative Fehler r_w?

   (c) Warum bleibt bei Einheitenwechsel der relative Fehler unverändert? (Das sollten Sie verbal ordentlich begründen können.)

   (d) Geben Sie eine Formel für $r_w - r_m$, welche diese Größe in absolutem Fehler, wahrem Wert und Messwert ausdrückt.

10. (Bei freien Kapazitäten:) Wenden Sie die allgemeine binomische Formel an auf $(-1+1)^n$, $n \geq 1$. Welche Beziehung zwischen der Anzahl der geradzahligen Teilmengen einer Menge von n Elementen und der Anzahl ihrer ungeradzahligen Teilmengen ergibt sich daraus? Versuchen Sie diese Beziehung auch direkt herzustellen, indem Sie geeignete Zuordnungen bilden, welche jeder geradzahligen Teilmenge eine ungeradzahlige umkehrbar eindeutig zuordnen.

Übung (3)

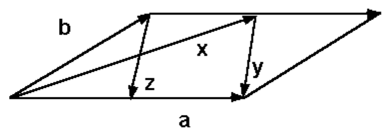
1. Eine Grundtatsache der reellen Zahlen ist folgende: wenn $\varepsilon > 0$ (so klein ε auch sei), werden die Zahlen $n\varepsilon$ mit natürlichem n beliebig groß. Folgern Sie daraus unter Benutzung der binomischen Formel, dass $(1+\varepsilon)^n$ mit wachsendem natürlichen n beliebig groß wird für $\varepsilon > 0$.Nunmehr stellen Sie eine Zahl der Form $1-\varepsilon$ mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, in der Form dar: $1-\varepsilon = \frac{1}{1+\delta}$, mit einer Zahl $\delta > 0$, und folgern Sie daraus weiter, dass die Zahlen $(1-\varepsilon)^n$ mit wachsendem n beliebig nahe an die Zahl Null kommen.

2. Ein Polynom in x vom Grad n wird mit einem Polynom vom Grad m multipliziert. Was für ein Ausdruck kommt dabei heraus? Wie rechnet man den Koeffizienten von x^3 im Resultat aus? Verallgemeinerung?

3. Sei $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ mit festen Zahlen a, b, c, d, welche die Eigenschaft haben, dass $ad-bc \neq 0$. Sei g eine Funktion derselben Art. (Wie sollte man g etwa aufschreiben?) Bilden Sie $g(f(x))$, und zeigen Sie, dass diese Funktion wieder vom selben Typ ist.

4. Was bedeutet in der Ebene die Beziehung $|x|+|y| \leq 1$? (Welche Punktmenge wird dadurch beschrieben?) Was bedeutet die Beziehung $x^2+y^2 \leq 1$? Welche Symmetrien können Sie an den Bedingungen ablesen?

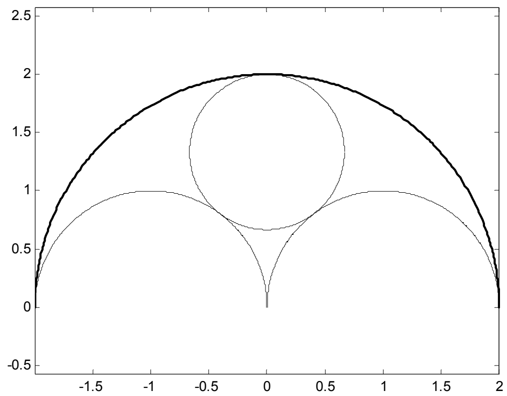
5. In der folgenden Skizze sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ gegeben und die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ gesucht, also letztere in $\vec{a}, \vec{b}$ auszudrücken durch die geometrischen Vektorraumoperationen. Zu verstehen: Die ganze Figur ist ein Parallelogramm, $\vec{x}$ und $\vec{z}$ (genauer: deren hier gezeichnete Repräsentanten) stoßen auf den jeweiligen Seitenmittelpunkt.



6. Skizzieren Sie in der Ebene exemplarisch den geometrischen Gehalt der Aussage $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$. An welchen geometrischen Satz erinnert das?

7. Wie viele Zahlenangaben benötigen Sie jeweils, um zu beschreiben: Eine Richtung in der Ebene / eine Richtung im dreidimensionalen Raum / ein Dreieck in der Ebene mit genauer Lage / ein Dreieck (nur die Form mit genauen Maßen, also bis auf Kongruenz) / eine Parabel in der Ebene mit genauer Lage / eine Parabel (nur die Form, bis auf Kongruenz)?

8. Betrachten Sie folgende Figur - beachten Sie die angegebenen Koordinaten; geben Sie eine Parameterdarstellung des umfassenden Halbkreises sowie eine solche des linken einbeschriebenen Halbkreises. Finden Sie (über eine Pythagorasbeziehung) den Radius sowie den Mittelpunkt des einbeschriebenen kleinen Kreises heraus, und parametrisieren Sie auch diesen. Rechnen Sie auch die Berührpunkte mit den Halbkreisen aus.:



Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein, mit vollem Quader.

2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$.Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der $x-$ Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der $z-$ Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der $y-$ Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.

   (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?

   (b) die obere Würfelseitenfläche,

   (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,

   (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts hinten ausgeht.

   (e) Versuchen Sie, alle Würfelseitenflächen auf einmal zu beschreiben. Verwenden Sie dazu die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Hinweis: Bilden Sie Summen dieser Vektoren mit geeigneten Vorfaktoren (Koeffizienten), und vergessen Sie die Lage des Würfelmittelpunktes nicht.

3. Seien die Punkte P, Q, R durch folgende Koordinatendarstellungen ihrer Ortsvektoren gegeben: $\vec{x}_P^K = (3, -4)$, $\vec{x}_Q^K = (2, 3)$, $\vec{x}_R^K = (4, 5)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch P geht und die Strecke $\overline{QR}$ halbiert.

4. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

5. Im E^3 mit kartesischem Koordinatensystem K liege eine Parabel p, deren Form genau die der Normalparabel $y = x^2$ sei (mit kartesischen Koordinaten in der $xy-$ Ebene). Die Parabel p möge jedoch die $z-$ Achse als ihre Parabelachse haben (geöffnet in deren Positivrichtung), und die senkrechte Projektion von p auf die $xy-$ Ebene ergebe die Gerade $\vec{x}_g(\lambda) = (\lambda, \lambda, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für p. Was für ein Gebilde erhalten Sie, wenn Sie alle Ortsvektoren von p mit 10 multiplizieren? Spiegeln Sie dies letztere Gebilde auch an der $xz-$ Ebene.

6. Seien P_k, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, die Punkte mit den Koordinatendarstellungen $(k, 0, 0)$ in einem kartesischen System K, also $\vec{x}_{P_k}^K = (k, 0, 0)$. Projizieren Sie alle diese Punkte auf die $y, z-$ Ebene, indem Sie jeweils einen Sehstrahl vom Auge in $(-1, 0, 1)$ zu P_k mit dieser (Bild-)Ebene schneiden. Geben Sie einen allgemeinen Ausdruck für den Bildpunkt $P_k'^K$ in Koordinatenform. Zeigen Sie, dass der Abstand zwischen P_{k+1}' und P_k' mit wachsendem k immer kleiner wird. Welchem Punkt kommen die P_k' mit $k \to \infty$ beliebig nahe, ohne diesen Punkt zu erreichen? (Sie haben den Verkürzungseffekt und das Phänomen des Fluchtpunktes bei zentralperspektivischer Abbildung beschrieben.)

Aufgaben zum Wochenende (1)

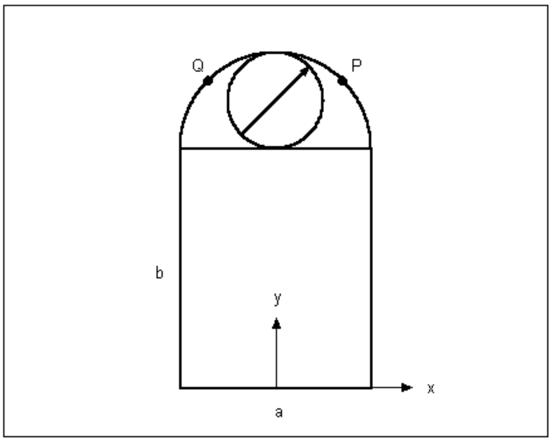
1. Lösen Sie im Bereich der reellen Zahlen die Gleichung $x^4 + 2x^2 - 2 = 0$. Hinweis: Führen Sie die neue Unbestimmte $y = x^2$ ein, achten Sie jedoch darauf, dass Sie nur positive Lösungen der entstehenden Gleichung in y brauchen können.

2. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung $x = \frac{1}{1+ax}$ (x Unbestimmte, a äußerer Parameter). (Denken Sie an Fallunterscheidung!)

3. Seien $\vec{x}_P = (-2, 3, -1)$, $\vec{x}_Q = (4, 2, 2)$. (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$. (b) Welche Gerade liegt genau in der Mitte zwischen h und der Geraden g, welche durch P und Q geht? (c) Beschreiben Sie die Menge aller Punkte, die zwischen den Geraden g und h liegen, einschließlich dieser Geraden als Ränder.

4. Schneiden Sie die Ellipse $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + (4y)^2 = 1$ mit dem Kreis $x^2 + y^2 = 1$. (Vorab: Zahl der Schnittpunkte?)

5. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, und der Kreis ist einem Halbkreis einbeschrieben, der eingezeichnete freie Vektor bilde einen Winkel von 45 Grad mit der $x-$ Achse, die Punkte P, Q haben offensichtliche Lage, a und b bezeichnen Längen. Geben Sie die Koordinatendarstellungen für P, Q und den eingezeichneten Vektor. Parametrisieren Sie den einbeschriebenen Kreis.



6. Es seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Ortsvektoren, beide nicht Null, welche nicht dieselbe Richtung haben. Betrachten Sie das Parallelogramm der Punkte mit den Ortsvektoren $\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$. Nunmehr pflastern Sie die ganze Ebene mit Parallelogrammen duch Anlegen von Kopien dieses Parallelogramms. Wie lautet der allgemeine Ausdruck für alle Punkte des so entstehenden Parallelogramm-Gitters? Beschreiben Sie auch alle Ursprungsgeraden, auf denen unendlich viele der Gitterpunkte liegen.

7. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene im dreidimensionalen Raum, welche beschrieben ist durch die Gleichung $3x + 4y - z = 1$.

8. Es sei E die Ebene, welche parametrisiert ist mit $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(-1, 2, 1) + \mu(2, 1, -1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Beschreibung der Ebene E in der Form $ax + by + cz = d$, mit festen Zahlen a, b, c, d. Tun Sie dies jedoch so mit brutaler Rechengewalt, dass Sie nichts benutzen, was noch nicht im Kurs behandelt wurde. Hinweis: Sie kennen laut Parameterdarstellung die allgemeine Form der $x, y, z-$ Koordinaten eines beliebigen Punktes von E, ausgedrückt durch λ, μ. Nun suchen Sie Zahlen a, b, c derart, dass $ax + by + cz$ nicht mehr von λ, μ abhängt, sondern eine Konstante ergibt.

9. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis g. Beschreiben Sie Gebilde b. in beiden üblichen Formen, auch h. in ordentlicher Form. (Was haben die Ungleichungen jeweils zu bedeuten?)

   a. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, 1 - \lambda^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (3 - \lambda, 1 - 4\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, c. Im $\mathbb{R}^2$: $2x^2 = y^2$. d. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2, 1, 3) + \mu(3, 4, -2)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. e. Im $\mathbb{R}^3$: $z^2 = x^2 + y^2 + 1$. f. Im $\mathbb{R}^3$: $y = x^3$. g: Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, \lambda^2, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. h. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2 - \mu, -2\lambda + 3\mu - 1, 3\lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.