Übungen zum Abschluss (16)

(1) Sie haben das Dreieck PQR, $\vec{x}_P = (1,2,2)$. $\vec{x}_Q = (3,-1,2)$, $\vec{x}_R = (2,-2,1)$.
   (a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g, welche durch P geht und die Dreieckseite $\overline{QR}$ halbiert.
   (b) Geben Sie den Dreieckswinkel im Punkt P an.
   (c) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, welche parallel zum Dreieck und senkrecht auf der Dreieckseite $\overline{QR}$ steht und durch den Mittelpunkt dieser Strecke geht.
   (d) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck PQR?

(2) Sei E sie Ebene, welche durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$ beschrieben wird. Die Ebene F gehe aus E dadurch hervor, dass E mit dem Vektor $(3,-4,5)$ parallel verschoben wird. Finden Sie direkt eine Normalenform für F. Welchen Abstand hat F vom Koordinatenursprung?

(3) Schneiden Sie die Parabel $\vec{x}(t) = (1,2,2) + t\,(2,1,1) + \frac{1}{2}t^2\,(0,0,-1)$, $t \in \mathbb{R}$, mit der $xy-$Ebene.

(4) In welchem Winkel trifft die Bahn der Kurve $\vec{x}\,(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, auf die $xy-$ Ebene? Wie sieht die Bahn aus?

(5) Wie können Sie eine Parabel in der Ebene beschreiben, die kongruent zu Parabel $y = x^2$ ist, jedoch ihren Scheitel in $(2,1)$ hat und ihre Achse in Richtung des Vektors $(-1,1)$, in dessen Richtung sie auch geöffnet sein soll?

(6) Berechnen Sie das Volumen des Spats, welcher von den Vektoren $\vec{a} = (1,3,2)$, $\vec{b} = (-4,2,1)$, $\vec{c} = (2,-4,7)$ gebildet wird. Was können Sie aus dem Resultat zur Lösbarkeit aller Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{d}$$

sagen, $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$? Lösen Sie das System speziell für $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(7) Zerlegen Sie den Vektor $(3,3,2)$ in eine (Vektor-)Komponente parallel zu $(1,2,3)$ und eine (Vektor-)Komponente senkrecht zu $(2,-1,2)$. Überlegen Sie auch, worauf es beruht, dass diese Aufgabe eindeutig lösbar ist.

(8) Sagen Sie alles Wissenswerte zur Funktion $f(x) = \frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (im maximalen reellen Definitionsbereich - was ist der?). (Stets: Symmetrie? Pole? Grobe Skizze (Vorzeichen, Monotonien, Verhalten für große $|x|$, wenn Funktion für solche definiert.) Übrigens können Sie sich hier vollständig auf elementare Beobachtungen am Rechenausdruck beschränken, es gibt keinen Anlass, auch nur die erste Ableitung auszurechnen.

(9) Was ist $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x^2}}{x}$?

(10) Betrachten Sie die Funktion $g(x) = \sin^2 x + \cos x$. Welcher Bereich von x genügt für eine grobe Skizze? Produzieren Sie eine grobe Skizze durch Überlagern der Graphen beider Summanden (deren Graphen Sie einfach hinmalen können sollten). Welche Extrema (wie viele und welcher Art) es innerhalb einer Periodenlänge gibt, das sollten Sie damit heraushaben. Für welche Frage wäre nunmehr die erste Ableitung noch heranzuziehen? Tun Sie das, und beantworten Sie die noch offene Frage. (Für Wendepunkte begnügen Sie sich damit, qualitativ im Rahmen der groben Skizze festzustellen und zu markieren, wo sie ungefähr liegen.) Geben Sie exakt (ganzzahlig parametrisiert) alle lokalen (die in *diesem* Falle auch globale sind) Maxima (nur Abszissenwerte natürlich) von g an.

(11) Bilden Sie folgende Ableitungen: $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{1-2x^2}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^{-2x}+xe^{-x}}{2-e^{2x}}$. Wie lautet die Näherung 1. Ordnung für $\frac{e^{-2x}+xe^{-x}}{2-e^{2x}}$ für kleine $|x|$?

(12) Sie wissen von einer Funktion f, dass $f(x_0) = 2$ und $f'(x) = e^{-2x}$ für alle x. Ermitteln Sie daraus $f(x)$ für beliebige x.

(13) Berechnen Sie den Mittelwert von g auf $[0, 2]$, $g(t) = t\sqrt{t+1}$.

(14) Berechnen Sie $\int \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}x-3}}dx$.

(15) Berechnen Sie $\int \frac{x^2}{(x-2)(x-3)(x-4)}dx$. Wie sieht der Graph der Funktion aus?

(16) Berechnen Sie $\int \frac{x^3}{x^3-1}dx$. (Was müssen Sie zuerst tun? Was haben Sie dann mit dem Nenner im verbleibenden Bruch zu tun?) (Diese Aufgabe ist etwas langwieriger, aber es ist fein, wenn Sie ein gutes Stück weit damit kommen und vor allem die Strategie bewältigen.)

(17) Was entsteht aus dem Integral $\int \frac{x}{\ln(x)}dx$, wenn Sie die Substitution $u = \ln(x)$ vornehmen? Nützt das etwas? (Man kann viele Integrale nicht elementar lösen, doch häufig durch eine Substitution ein solches auf ein anderes zurückführen, das bereits als nicht elementar lösbar bekannt ist. Außerdem lassen sich Werte bestimmter Integrale so auf bereits sehr genau verfügbare andere zurückführen.)

(18) Lassen Sie den Graphen von $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ im Bereich $[-r, r]$ um die $x-$ Achse rotieren. Rechnen Sie den Oberflächeninhalt des zugehörigen Rotationskörpers aus - Was ist das für einer?