Übung (13)

(1) Sei $f(x) = \frac{\sin^2(x) - \cos(x)}{2 + \sin(x)}$ Sei $x_0 = \pi/2$. Rechnen Sie nach, welchen absoluten und welchen relativen Fehler Sie machen, wenn Sie die Ableitung $f'(x_0)$ durch den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ mit $\Delta x = \frac{1}{100}$ nähern. Sie sollten die Ableitung vernünftig vereinfachen und $f'(x_0)$ im Kopf ausrechnen können!

(2) Welche Eigenschaften der Funktion $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$sind bedeutend? Nutzen Sie grobe Skizze, erste und zweite Ableitung, letztere jedoch nur für die Wendepunktfrage.

(3) Ebenso: Klären Sie die wesentlichen Eigenschaften von $g(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, $h(x) = \arctan^3(x)$.

(4) An welchen Stellen besitzt die Funktion $g(x) = \ln\left(1 + \left|x^2 - 2x - 1\right|\right)$ keine Ableitung? Wie sieht der Graph aus? Gibt es Extremwerte?

(5) Klären Sie die Frage nach Extrema quantitativ mittels der ersten Ableitung für die Schar von Funktionen $f_\alpha(x) = x + \alpha \sin(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

(6) Sei folgende Kurve gegeben: $\vec{x}(t) = (\cos(2t + \pi/2), \cos(t))$, $0 \leq t < 2\pi$. Finden Sie heraus, wie die Bahn der Kurve aussieht und in welcher Weise diese Bahn durchlaufen wird. Zu welchen Zeitpunkten t wird $(0,0)$ erreicht? In welchem Winkel stehen die Geschwindigkeitsvektoren für diese Werte von t zueinander? Zusatzfrage: Wie können Sie mehr Knotenpunkte produzieren?

(7) Geben Sie folgende Grenzwerte an - in welchen Fällen sind die de L'Hospitalsche Regeln anwendbar?
   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{x}$,
   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)}{x^2}$,
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

(8) Sie berechnen das Volumen eines realen Kegel-Körpers (gerader Kreiskegel), indem Sie die Höhe messen und den Radius des Grundkreises und anschließend ausrechnen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Nun berechnen Sie bei gemessenen Werten $r = 10$ m und $h = 20$ m und bei eine höchsten Messfehlern für den Radius $|\Delta r| = 1$ mm und für die Höhe $|\Delta h| = 2$ mm eine (linear genäherte) Obergrenze für den Fehler bei der Volumenmessung.

Übung (14)

(1) Seien $x_1, ..., x_n$ beliebige reelle Zahlen, $n > 1$. Für welche Zahl α wird dann $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)^2$ minimal? Inhaltliche Deutung der Lösung?

(2) Geben Sie die Näherung für die Nullstelle von $x^5+x^2+1+\sin(x)=0$, Solution is: $\{x=-1.0406\}$ an, die Sie erhalten, wenn Sie mit $x_0=-1$ starten und 2 Iterationsschritte des Newtonverfahrens durchführen. Wie viele Stellen hinter dem Komma sind korrekt? Geben Sie eine obere Schranke für den absoluten Fehler Ihrer Näherung.

(3) Diskutieren Sie die Funktion $f(x)=\frac{1}{1+\tan(x)}$. Achtung: Nicht alle Definitionslücken verhalten sich hier gleich - erkennen Sie zwei Typen. Stellen Sie für f auch einmal quantitativ die Lage der Wendepunkte fest. Sie können die Steigung bei den Nullstellen (?!) mittels de L'Hospitalscher Regel feststellen.

(4) Für welche Zahl $\xi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ ist die mittlere Steigung von sin auf diesem Intervall gleich $\sin'(\xi)$? Gibt es nur eine solche Zahl ξ?

(5) Geben Sie eine obere Schranke für $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx$ anhand der Flächendeutung.

(6) Welchen Mittelwert hat $\sin^3$ auf dem Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$? Beantworten Sie die Frage anschaulich - ohne etwa ein Integral auszurechnen.

(7) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{1+x}$ im Bereich $[1;3]$? Rechnen Sie ihn mittels eines Integrals aus.

(8) Berechnen Sie möglichst praktisch: $\int_{-1}^{1}\left(1+\sqrt[3]{|x|}\right)dx$.

(9) Berechnen Sie $\int_0^{\pi}\cos(3t)\,dt$, $\int\frac{2}{x^2+1}dx$, $\int\frac{\sqrt{x^4}+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$, $\int(1-3x)^{90}\,dx$, $\int\sqrt{2x-1}dx$.

(10) Denken Sie sich das Dreieck $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) mit $a, b > 0$ als massives Flächenstück mit homogener Massenverteilung. Berechnen Sie nun die $x-$ Koordinate des Schwerpunktes, indem Sie das mit der (auf Gesamtmasse 1 normierten) Massendichte jeweils an der Stelle x gewichtete Mittel der $x-$ Werte als Integral berechnen. Die Massendichte an der Stelle x erhalten Sie, indem Sie die Masse des Dreiecks von links bis zur Stelle x als Funktion von x nach x ableiten. Normiert wird, indem man durch die Masse des ganzen Dreiecks teilt. Sie sollten mit Ihr Resultat mit der Schwerpunktsberechnung über Vektorrechnung vergleichen.

Übung (15)

(1) Sie starten zur Zeit $t=0$ im Punkt $(0,0)$ eine Bewegung, die Anfangsgeschwindigkeit ist $(1,0)$, die Beschleunigung zur Zeit t sei $(t,\cos(t))$. Geben Sie die Geschwindigkeit und den Ort als (vektorwertige!) Funktionen $\vec{v}$ und $\vec{s}$ der Zeit. Nutzen Sie bestimmte Integrale. Stellen Sie sich auch grob die Bahn der Kurve $\vec{s}(t)$ vor.

(2) Berechnen Sie $\int xe^{-2x}dx$, $\int x\sqrt{1+x}dx$.

(3) Berechnen Sie $\int x^2\sqrt{1-x^3}dx$, $\int \sin(x)e^{1-\cos(x)}dx$.

(4) Berechnen Sie $\int dx \ln\left(x^3\right)$, $\int \frac{dx}{3+4x^2}$.

(5) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$, $\int \frac{dx}{e^x(1-e^{2x})}$.

(6) Berechnen Sie $\int dx\frac{\ln(2x)}{x}$, $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$. (Bekannte Stammfunktion zu ln nutzen!)

(7) Wenn Sie einer Formelsammlung $\int\sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ entnommen haben: Wie können Sie dann ganz schnell an $\int\sqrt{1-2x^2dx}$ herankommen?

(8) Rechnen Sie das Integral $\int_0^1 \sqrt{1+2\sin^2 xdx}$ numerisch mittels (programmierbaren) Taschenrechners oder besser Computers so aus, dass Sie sicher sind, dass die erste Stelle hinter dem Komma korrekt ist. Können Sie auch etwas über den Fehler sagen, den sowohl Unter- als Obersumme Ihres Resultates als Näherungen des Integrals haben? Versuchen Sie nicht, eine einfache Stammfunktion zu finden - eine solche existiert nicht! Aber ein numerisches Resultat des Integrals, das Ihnen ein Computeralgebraprogramm liefert, können Sie zur Kontrolle nutzen.

(9) Sie lassen das Parabelstück $y=x^2$, $0\le x\le a$, $a>0$, um die $x-$ Achse rotieren. Welches Volumen hat der so entstehende Rotationskörper?

(10) (Extra:) Betrachten Sie nunmehr $\ln(a) := \int_1^a \frac{1}{x}dx$, $a>0$, als *Definition* der Logarithmusfunktion. Folgern Sie mittels Integralrechnung zuerst $\ln(1/b) = -\ln(b)$ und dann die wesentliche Eigenschaft $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ $(a,b>0)$.

Aufgaben zum Wochenende (4)

(1) Die Funktion H ist folgendermaßen definiert: $H(x) = 0$ für $x < 0$, $H(x) = 1$ für $x \geq 0$. Wie können Sie die Arcustangensfunktion derart modifizieren (lineare Transformationen!), dass Sie eine sehr gute Annäherung an H bekommen? Geben Sie einen entsprechenden Rechenausdruck mit verbaler Begründung an.

(2) Stellen Sie die Flugparabel zu folgenden Daten auf: Konstante Beschleunigung ist $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Geschwindigkeit zur Zeit t_0 ist $\vec{v}_0 = (1, 2, 3)$, Ort zur Zeit t_0 ist $\vec{x}_0 = (0, 0, 10)$. Rechnen Sie nunmehr auch den Scheitelpunkt der Parabel aus, indem Sie die Bedingung stellen, dass zum betreffenden Zeitpunkt Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor senkrecht aufeinander stehen.

(3) Schreiben Sie die komplexe Zahl $e^{j\omega t}$ als Vektor des $\mathbb{R}^2$. Leiten Sie diesen Vektor komponentenweise nach t ab, und sehen Sie, dass dies als komplexe Zahl geschrieben $j\omega e^{j\omega t}$ ergibt.

(4) Wie sieht der Graph aus zu $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$? Was erwarten Sie an der Stelle $x = 0$? Nutzen Sie die erste Ableitung - sie genügt. Beantworten Sie die Frage nach Wendepunkten qualitativ, vielleicht sogar auch quantitativ. $\frac{d^2}{dx^2} e^{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{9} \sqrt[3]{x} e^{\sqrt[3]{x}} \frac{-2+\sqrt[3]{x}}{x^2}$

(5) Skizzieren Sie grob den Graphen von $f(x) = x^3\sqrt{1 - x^2}$. Maximaler reeller Definitionsbereich? Stellen Sie quantitative Feinheiten mittels der ersten Ableitung fest - warum genügt die? Formulieren Sie verbal alle wesentlichen Eigenschaften.

(6) Was ist der (vektorielle!) Mittelwert der Vektoren $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi/4$? Können Sie dem einen physikalischen Sinn geben?

(7) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}$. Maximaler reeller Definitionsbereich? Grobe Skizze des Graphen? Berechnen Sie die erste Ableitung und betrachten ihr Vorzeichen - was sagt das? Aber ist die Funktion f monoton fallend? Wie steht es mit dem asymptotischen Verhalten für $x \to \infty$? Finden Sie intuitiv die Antwort. Wenden Sie aber auch auf die Funktion f^2 die entsprechende de L'Hospitalsche Regel an - finden Sie damit also $\lim_{x\to\infty} f^2(x)$, und schließen Sie auf das Resultat für f, indem Sie die Stetigkeit der Wurzelfunktion nutzen. Wie steht es mit Wendepunkten? (Nicht rechnen, sondern graphisch überlegen unter Beachtung des Grenzwertes der Ableitung für $x \to 0$, $x > 0$.)

(8) Berechnen Sie folgende Integrale, achten Sie darauf, dass man bei einem bestimmten Integral eventuell den Wert sagen kann, ohne eine Stammfunktion ausrechnen zu müssen.
   (a) $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx$, $\int_0^3 \sqrt[4]{x^3} dx$, $\int_{-1}^1 x^4 \arctan^3(x) dx$, $\int_0^\pi \sin(4x) dx$.
   (b) $\int \sin(x) \sin(x + \pi)\, dx$ (Hinweis: Schreiben Sie mittels der Additionstheoreme für cos den Integranden anders.)
   (c) $\int \frac{x^2}{(x-1)(2-x)} dx$
   (d) (Umkehrung der Kettenregel:) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}) dx$ Nutzen Sie dabei die bekannte Stammfunktion zu ln: $x \ln(x) - x$.

(9) Für welche reellen Zahlen α existiert $\int_0^1 x^\alpha dx$?