Übung (9)

1. Drücken Sie $3\vec{b}\,(4\vec{a} \times (-5)\,\vec{c})$ aus durch $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$. Geben Sie auch eine geometrische Deutung des Resultats an.

2. Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} - 4\vec{y}) \times (3\vec{y} - 5\vec{x})$.

3. Vereinfachen Sie den Ausdruck $\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)\left(\left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \left(3\vec{c} + 5\vec{a} - 4\vec{b}\right)\right)$. (In das Resultat geht wesentlich die Determinante einer Matrix ein - welcher Matrix?)

4. Skizzieren Sie folgende komplexen Zahlen in der komplexen Ebene:

$$2 - 3j,\ e^{-j\pi 7/4},\ 2e^{4j\pi/3}.$$

   Geben Sie zu den beiden Zahlen in Polarform die exakten (!) kartesischen Formen. Was sind die Beträge der drei Zahlen (im Kopf!)?

5. Bringen Sie auf kartesische Endform: $z = \frac{2-3j}{3+j}$. Was ist $|z|$? Wie können Sie nun möglichst einfach auf $|\overline{z}|$, $\left|\frac{1}{z}\right|$ kommen, ohne diese Zahlen auszurechnen? Rechnen Sie jedoch all diese Zahlen auch aus, in kartesischer Endform, und überprüfen Sie Ihre Resultate für die Beträge.

6. Was kommt heraus, wenn man auf eine komplexe Zahl z fünf mal die Konjugation anwendet?

7. Bringen Sie die Zahl $z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}j$ in exakte Polarform. Wie können Sie dagegen die Zahl $z_2 = 2 - 5j$ nur in *exakter (!)* Polarform schreiben? Woran liegt das?

8. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die folgende Gleichung: $\frac{1+z}{2-z} = 1 - j$.

9. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ die Gleichung $z^2 - z + 5 = 0$.

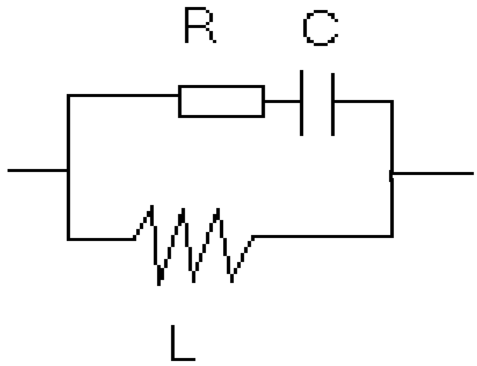
10. Was ergibt sich mit

$$\frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2},\ \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}?$$

11. Was für ein Gebilde wird parametrisiert mit $z(t) = 2 + tj$, $t \geq 0$?

Übung (10)

1. Wie lautet der Widerstand folgender Schaltung mit vorgegebenen Konstanten $R, C, L > 0$?



2. Lösen Sie die Gleichung in $\mathbb{C}$: $z^2 - 2(j+1)z - 2j + 2 = 0$.

3. Rechnen Sie mittels des Additionstheorems exakt $\sin(\pi/12)$ aus. Hinweis: Drücken Sie dazu $1/12$ geschickt als Summe aus - denken Sie daran, dass Sie $\sin(\pi/3), \sin(\pi/4)$ exakt kennen!

4. Schreiben Sie mit Additionstheorem Gleichungen für $\cos(x+y)$ und $\cos(x-y)$ hin. Addieren Sie diese Gleichungen, und gewinnen Sie eine (später nützliche!) Umformung für $\sin(x)\sin(y)$.

5. Geben Sie *alle* Maxima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 3\cos(4x-1)$. Was sollte man überlegen, um schnell den Graphen zu zeichnen, unter Markierung der wichtigsten quantitativen Eigenschaften?

6. Ermitteln Sie durch Bruchrechnung das Additionstheorem für Tangens: Setzen Sie an: $\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}$, nun ersetzen Sie in Zähler und Nenner durch die von den Additionstheoremen von sin und cos gegebenen Ausdrücke, und kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie wieder Tangens-Ausdrücke erhalten.

7. Rechnen Sie nach, welchen Betrag der Vektor $(r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\varphi)\sin(\vartheta), r\cos(\vartheta))$ hat.

8. Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^2)$, $x\sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien ausdrücklich fest.

9. Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von f liegt spiegelsymmetrisch zur Geraden $x = a$.'

10. Sei f eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Geben Sie eine Parameterdarstellung für den Graphen von f. Nunmehr parametrisieren Sie auch die Punktmenge, die man erhält, wenn man den Graphen von f mit dem Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. parallel verschiebt. Geben Sie einen (möglichst einfachen) Ausdruck für die Funktion an, deren Graph diese neue Punktmenge ist. Führen Sie dasselbe Programm durch mit der geometrischen Operation: 'Stauchen des Graphen von f längs der $x-$ Achse (mit Festlassen der $y-$ Achse)' mit Faktor $\alpha > 0$.

Übung (11)

1. Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2}+\cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

2. Skizzieren Sie grob den Graphen von $f(x)=x^3-x$. Erkennen Sie den Wendepunkt qualitativ. Nehmen Sie nun als (später auch zu begründende) Tatsache hin, dass die Extrema bei $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ liegen. Wie können Sie die Funktion derart verändern, dass der Wendepunkt in den Punkt (a,b) versetzt wird und zusätzlich der Abstand des Wendepunktes zu den lokalen Extrema den Wert $c>0$ erhält?

3. Schreiben Sie den Ausdruck $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ auf die Basis e um.

4. Was bedeutet die Formel $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$ für den geometrischen Zusammenhang des Graphen zu $\ln(ax)$ mit dem Graphen zu $\ln(x)$? Welche *andere* geometrische Operation mit dem Graphen zu $\ln(x)$ liefert *ebenfalls* den Graphen zu $\ln(ax)$?

5. Lösen Sie die Gleichungen $3^{4x-1}=10$ und $\log_5(x)=5$.

6. Wenn eine gedämpfte Schwingung die Form $e^{-3t}\sin(5t)$ hat - in welchen Zeitabständen sinkt dann die Amplitude auf jeweils 1 Prozent?

7. Konstruieren Sie eine Funktion, welche den zeitlichen Verlauf einer Schwingung darstellt, deren Amplitude periodisch auf- und abschwillt.

8. Wie sehen die Graphen der Funktionen $f(x)=\arctan(a(x-b))$ aus, $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$?

9. Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an. Nutzen Sie das elementare Graphenkonstruieren aus bereits vorhandenen Grundgraphen. Vergessen Sie auch nicht, sofort nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen.

   (a) $f(x)=x^3e^x$
   (b) $g(x)=\sqrt{-2x-3}$
   (c) $k_1(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $k_2(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $k_3(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$
   (d) $h_1(x)=\frac{x}{x^2-1}$, $h_2(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$, $h_3(x)=\frac{x^3}{1-x^2}$

10. Stellen Sie $f(x)=\sin(3x)+2\cos(3x)$ in der Form $f(x)=A\sin(3x+\varphi)$ dar.

Übung (12)

1. Schreiben Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = 2\,(x+1)^5$ an der Stelle $x_0 = -2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(-2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(-1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.

2. Berechnen Sie folgende Ableitungen:

   (a) $\frac{d}{dx}\left(e^x - 2\sqrt[3]{x^5} + x^{e+1} + \ln(x) - 3\sin(x)\right)$

   (b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}\left(-2x+1\right)^5$

   (c) $\frac{d}{dx}x\tan(x)$ (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)

   (d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(2x)}{1+\cos(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^4}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?

   (e) $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{\sin(1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x=0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.

   (f) $\frac{d}{dx}\left(x - 5x^2\right)^2$ (Kettenregel, nicht ausmultiplizieren!)

   (g) $\frac{d}{dx}\sin^3(x)$ (was ist beim Graphen qualitativ anders als bei sin, und wie äußert sich das in der Ableitung?)

   (h) $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x^2 + 1}$, α reellwertige Konstante (Wohin geht die Steigung der Funktion $x \mapsto \sqrt{\alpha x^2+1}$ bei $\alpha < 0$ für x gegen die Ränder des Definitionsbereiches?)

   (i) $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x^2-3}}$

   (j) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x^2}{(x+\alpha)^3(x-3)}$ (Achtung, nach α ist abzuleiten!)

   (k) $\frac{d}{dx}\log_a(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ ($a > 0$ in beiden Fällen)

3. Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = \ln^2(x)$ für $x \to \infty$? Was bedeutet das graphisch?

4. Wie sieht der Graph aus zu $g(x) = e^{\cos^2(x)}$? (Geben Sie eine grobe Skizze). Wo liegen die Maxima? Überlegen Sie das direkt, verifizieren Sie es auch über die 1. Ableitung.

5. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ für den Ausdruck $f(x) = \frac{1}{1+\tan(\pi+x)}$. Wie groß ist der relative Fehler bei entsprechender Näherung von $f(-0.1)$?

6. Sei für die Gerade g eine Parameterdarstellung $\vec{x}_g\,(\lambda) = \vec{x}_P + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, gegeben. Ferner sei $\vec{x}_Q$ gegeben. Zeigen Sie mittels der ersten Ableitung, dass der minimale Abstand zwischen einem Punkt der Geraden g und dem Punkt Q sich durch das Lot von Q auf g ergibt. Hinweis: Arbeiten Sie zweckmäßig mit dem Abstandsquadrat.

Aufgaben zum Wochenende (3)

Erster Block: Wiederholungen zur Vektorrechnung

1. Schreiben Sie für die Ebene, welche durch $\vec{x}_E(\alpha,\beta) = (1,2,2) + \alpha(3,-1,-2) + \beta(2,3,-1)\,,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, gegeben ist, eine Normalenform auf. Welchen Winkel bildet die Ebene mit der Geraden g, $\vec{x}_g(\lambda) = (1,2,3) + \lambda(2,1,1)\,,\ \lambda \in \mathbb{R}$?

2. Betrachten Sie die Ebene E, welche durch die Gleichung $2x - y + z = 1$ gegeben ist. Geben Sie eine Parameterdarstellung für E, und produzieren Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene F, welche aus E dadurch entsteht, dass E um die $z-$ Achse um den Winkel $\pi/6$ gedreht wird, und zwar links herum, wenn man vom Punkt $(0,0,1)$ auf die $xy-$ Ebene blickt. Hinweis: Drehmatrix bilden und auf den allgemeinen Ausdruck der Parameterdarstellung für E anwenden.

3. Welches Volumen hat der Spat, welcher von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ mit $\vec{a} = (1,2,-2)\,,\ \vec{b} = (1,3,2)\,,\ \vec{c} = (2,1,-3)$ aufgespannt wird? Welches Volumen hat der Spat, welcher von den Vektoren $2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannt wird? (Letzte Frage möglichst praktisch beantworten!)

4. Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)\,,\ t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Bahn dieser Kurve vollständig auf dem Kegel liegt, der durch die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ beschrieben ist. Wie sieht diese Bahn aus?

Zweiter Block: Zu den komplexen Zahlen

1. Geben Sie in kartesischer Endform an: $z = \frac{3+5j}{2-3j}$, bestimmen Sie direkt mittels des Resultats ohne Rechnung die kartesische Endform von $z_1 = \frac{3-5j}{2+3j}$.

2. Geben Sie die exakte kartesische Form zu $e^{-5j\pi/6}$.

3. Lösen Sie in $\mathbb{C}$ aus zur Gleichung $\frac{\overline{z}-1}{jz+1} = 1 + j$?

4. (Schwieriger) Wie sieht folgende Menge komplexer Zahlen aus? $z(t) = \frac{1}{1+jt}$, $t \in \mathbb{R}$?

Dritter Block: Zu den Funktionen

1. Wie lauten die Abszissenwerte der Maxima von $-4\sin(3x-2)+5$?

2. Geben Sie *alle reellen* Lösungen der Gleichung $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ an.

3. Eine Funktion f habe die Eigenschaft, dass $f(0) = 0$ und $f(x) \to m$ für $m \to \infty$, $(m > 0)$. f steige derart gegen den Wert m, dass sich der Abstand zwischen m und $f(x)$ halbiert, wenn x um den Wert 10 anwächst. Geben Sie den Rechenausdruck für f.

4. Diskutieren Sie die Funktionen $g(x) = \frac{x^3-x}{1-x^2}$, $h(x) = \frac{x^4}{1-x^2}$ (ohne die Ableitung heranzuziehen). Grobe Skizze der Graphen! Überlegen Sie aber dann auch, was die erste Ableitung Ihnen noch mehr bringen würde in diesen Fällen.

5. Geben Sie die Näherung 1. Ordnung von $\arctan(1+x)$ für kleine Beträge von x.

6. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Gleichung $\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$ eindeutig nach y auf, mit äußerem Parameter x, nun machen Sie x zur unabhängigen Variablen, und skizzieren Sie die Funktion $f(x) =$ die Lösung y der obenstehenden Gleichung. Von welcher Funktion ist das die Umkehrfunktion?