

Übung (5)

1. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem - sagen Sie zuvor, wie die Lösungsmenge aussehen sollte bzw. geometrisch zu interpretieren wäre:

$$\begin{aligned}4x - 2y + 2u - 3v &= 1 \\ -3x \quad - 2u + v &= 0 \\ 2x + 3y - u + 2v &= 0\end{aligned}$$

2. Sagen Sie wiederum geometrische Deutung und formale Struktur der Lösungsmenge voraus. Lösen Sie dann (unter Nutzung der Besonderheiten des Systems):

$$\begin{aligned}u + v &= w \\ 2w - 2x &= y \\ 2x - 3w &= 1\end{aligned}$$

3. Zwei Ebenen im E^3 sei bezüglich eines Koordinatensystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z &= 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z &= 0\end{aligned}$$

beschrieben. Worin schneiden sich die Ebenen?

4. Schneiden Sie die Ebenen E_a , welche durch $(1, 2, 1) + \lambda(2a, -1, 3) + \mu(1, a, 1)$, gegeben sind, mit der Ebene F , die durch die Gleichung $2x - 3y + z = 1$ beschrieben wird. (Welche Rolle hat der Buchstabe a ?)
5. Geben Sie für die Ebene E , welche durch $\vec{x}_E(\lambda, \mu) = (1, 2, 2) + \lambda(-2, 1, 3) + \mu(2, 1, -2)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, gegeben ist, eine Darstellung in Gleichungsform. Stellen Sie dazu folgende rein algebraische Überlegung an: Die Abbildung \vec{x}_E hat Komponentenfunktionen wie $x(\lambda, \mu) = (1 - 2\lambda + \mu)$, analog $y(\lambda, \mu), z(\lambda, \mu)$. Was wir suchen, sind die Koeffizienten a, b, c, d einer beschreibenden Gleichung $ax + by + cz = d$. Also sollten a, b, c so gewählt werden, dass $ax(\lambda, \mu) + by(\lambda, \mu) + cz(\lambda, \mu)$ eine Konstante wird (also ohne λ, μ), die dann als so zu wählen ist, dass die Gleichung $ax + by + cz = d$ vom Aufpunkt der Ebene erfüllt wird.
- (a) Geben Sie eine E beschreibende Gleichung $ax + by + cz = d$. (Zusatzfrage: Gibt es dafür nur eine Lösung?)
- (b) Die Ebene F entstehe aus E durch Parallelverschiebung mit dem Vektor $(1, 2, 3)$. Beschreiben Sie auch F in Gleichungsform. (Nutzen Sie dazu direkt das Resultat aus a., führen Sie also nicht etwa mittels einer Parameterdarstellung für F noch einmal Aufgabenteil a. für F durch.) Was beobachten Sie beim Vergleich der Gleichungen für E und für F ? Welche geometrische Bedeutung sollte also der Vektor der Koeffizienten (a, b, c) besitzen?
6. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 3, 4)$. Eine Ebene E sei dadurch gegeben, dass P und Q auf ihr liegen und der Vektor $\vec{a} = (1, 2, -2)$ parallel zu E liegt. Geben Sie eine Parameterdarstellung für E .
7. Ein Fluss konstanter Breite b habe parallele gerade Ufer, und das Wasser fließe darin überall gleichmäßig parallel zum Ufer mit Geschwindigkeit $\vec{v} \neq \vec{0}$. Ein Schwimmer möchte das jenseitige Ufer genau am gegenüberliegenden Punkt erreichen, also den Fluss genau senkrecht zu den Ufern passieren. Welche Eigenschaft muss sein Geschwindigkeitsvektor *relativ zum Wasser* (auch den setzen wir als konstant an) haben, damit das gelingt? Man nehme dazu an, dass der Fluss dem Schwimmer seine Stömungsgeschwindigkeit augenblicklich und stets zusätzlich zu der Geschwindigkeit des Schwimmers relativ zum Wasser mitteile. Man fasse das Problem als zweidimensionales koordinatenmäßig, indem man den Ursprung in den Startpunkt des Schwimmers setze und die Achsenrichtungen günstig wähle.

Übung (6)

1. Seien die Ebenen E und F gegeben durch $\vec{x}_E(\alpha, \beta) = (1, 2, 2) + \alpha(2, 1, 3) + \beta(-1, 4, 2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_F(\lambda, \mu) = \lambda(1, 5, 5) + \mu(3, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie (nur unter Verwendung der linearen Operationen), dass diese Ebenen parallel liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge der Punkte zwischen E und F , die Ebenen selbst ausgeschlossen.
2. Denken Sie sich die Ebene E , welche durch $2x - 3y + 4z = 5$ beschrieben ist, als undurchsichtig. Kann man dann vom Ursprung aus den Punkt P mit $\vec{x}_P = (3, 4, 5)$ sehen?
3. Unter einem ebenen konvexen Viereck versteht man ein solches, in dem mit zwei Punkten auch stets die Verbindungsstrecke in der Vierecksfläche liegt (also kein 'Knick einwärts' vorliegt). Nicht ausgeartet ist es, wenn die vier Eckpunkte nicht auf einer Geraden liegen. Seien folgende Punkte gegeben: $\vec{x}_A = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_B = (2, -1, 2)$, $\vec{x}_C = (5, -8, -1)$, $\vec{x}_D = (3, -2, 1)$. Zeigen Sie möglichst ökonomisch, dass man mit $ABCD$ über den Rand eines nicht ausgearteten konvexen Vierecks läuft.
4. In den Punkten P, Q, R mit den Ortsvektoren $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_Q = (2, 3, -4)$, $\vec{x}_R = (3, -2, 1)$ liegen Massen $m_P = 3$, $m_Q = 4$, $m_R = 5$. Geben Sie den Schwerpunkt des Systems dieser drei Massenpunkte an.
5. Prüfen Sie (mit den bisher zur Verfügung stehenden Mitteln), ob folgende Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden: $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (3, 1, 2)$, $\vec{c} = (-2, 1, -3)$.
6. Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{c}$ habe die Lösungsmenge in parametrisierter Form: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, mit linear unabhängigen \vec{a}, \vec{b} .
 - (a) Welche Lösungsmenge hat dann $A\vec{x} = \vec{0}$?
 - (b) Kann $\vec{c} = \vec{0}$ und $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$ sein? Kann $\vec{c} \neq \vec{0}$ und $\vec{x}_0 = \vec{0}$ sein?
 - (c) Kann es einen Vektor \vec{d} geben, so dass $A\vec{x} = \vec{d}$ die leere Lösungsmenge hat?
7. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - (a) Berechnen Sie $A\vec{a}$ und $B\vec{b}$.
 - (b) Was können Sie ohne Rechnung über die Lösungsmengen von $A\vec{x} = \vec{0}$ und $B\vec{y} = \vec{0}$ sagen (Nullvektoren der passenden Dimensionen - welche sind das?)
 - (c) Ist $A\vec{x} = \vec{d}$ stets lösbar, wenn \vec{d} die passende Dimension hat (welche ist das?)? Ist $B\vec{y} = \vec{u}$ stets lösbar, wenn \vec{u} die passende Dimension hat?
8. Die Punkte A, B, C mögen nicht auf einer Geraden liegen. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Menge aller Punkte im Dreieck ABC , unter Verwendung von $\vec{x}_A, \vec{x}_B, \vec{x}_C$.

Übung (7)

Alle im Zusammenhang von Längen und Winkeln betrachteten Koordinatensysteme sind als kartesische vorauszusetzen! (Nur aus Platzersparnisgründen werden hier zuweilen Zeilenvektoren geschrieben.)

1. Geben Sie die Matrix für die Drehung um den Ursprung mit Winkel 60 Grad im Uhrzeigersinn in der Ebene. Hinweis: $\cos(\pi/3) = \frac{1}{2}$, den Sinuswert können Sie nun leicht exakt feststellen.
2. Geben Sie die Matrix für eine beliebige Scherung im \mathbb{R}^2 , welche parallel zur x -Achse ausgeführt wird und diese festlässt.
3. Warum ist die Spiegelung an der Ebene $z = 5$ im \mathbb{R}^3 keine lineare Abbildung? Welchen einfachen Rechenausdruck können Sie aber für diese Abbildung angeben?
4. Berechnen Sie die Länge des Vektors $\vec{a} = (1, 2, -2)$. Wie berechnen Sie *praktisch* die Länge von $(3, 6, -6)$?
5. Begründen Sie, dass $\left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = 1$, für jeden Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$.
6. Wie kann man das Skalarprodukt $\vec{a}\vec{b}$ zweier Spalten-Vektoren als Resultat einer Operation 'Matrix mal Vektor' erhalten?
7. Wie können Sie den Ausdruck $\left| \frac{3\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a} + \frac{\vec{a}\vec{b}}{\vec{a}^2}\vec{a} \right|$ vereinfachen? Warum kann es keinesfalls sein, dass da $4|\vec{b}|$ herauskommt?
8. (a) Multiplizieren Sie aus: $(2\vec{x} - 3\vec{y})^2$.
(b) Vereinfachen Sie: $2(\vec{a}\vec{b} - 3\vec{a}\vec{c}) + 2\vec{a}(\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c})$
9. Zeigen Sie, dass die Diagonalen eines Parallelogramms genau dann senkrecht aufeinander stehen, wenn das Parallelogramm eine Raute ist, also gleich lange Seiten hat.

Übung (8)

1. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_Q = (4, 1, -5)$. Was ist der Abstand zwischen P und Q ?
2. Welchen Winkel bildet die Gerade g , $\vec{x}_g(\lambda) = (1, 2, 2) + \lambda(2, -1, 3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit der xy -Ebene? (Hinweis: suchen Sie einen geeigneten Vektor, dessen Winkel zu g zur Antwort führt).
3. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, -2)$, $\vec{x}_Q = (-2, 1, 1)$, $\vec{x}_R = (3, 1, -1)$. Geben Sie für das Dreieck PQR eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P , welche den Winkel bei P halbiert.
4. Sei $\vec{x}_P = (-1, 0)$, $\vec{x}_Q = (0, 3)$, $\vec{x}_R = (0, -3)$. Betrachten Sie die Geraden g durch P und Q , h durch P und R . Seien weiter $\vec{x}_S = (0, 1)$ und $\vec{x}_T = (0, -1)$. Rechnen Sie nach (und skizzieren Sie die Situation!), dass die Geraden durch P und S sowie durch P und T nicht den Winkel zwischen g und h in drei gleiche einteilen. Formulieren Sie auch die zugehörige (aber eben zu naiv gedachte) 'Konstruktion' für die Dreiteilung eines Winkels.
5. Die Ebene E sei gegeben durch die Gleichung $2x - y + 3z = 1$.
 - (a) Wie lauten die Achsenabschnitte dieser Ebene?
 - (b) Geben Sie einen Vektor $\neq \vec{0}$ an, der senkrecht auf E steht.
 - (c) Welchen Abstand hat E vom Ursprung?
 - (d) Welchen Abstand hat E vom Punkt P , $\vec{x}_P = (2, 3, 4)$?
 - (e) Welchen Abstand hat E von der Ebene F , die durch $-4x + 2y - 6z = 10$ beschrieben ist?
 - (f) Welchen Winkel bildet E mit der xy -Ebene?
 - (g) Wie kann man von einer Geraden g mit Parameterdarstellung $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_Q + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, mit beliebigem Orts- und Richtungsvektor, feststellen, ob g auf E liegt?
6. Welchen Abstand hat der Punkt P , $\vec{x}_P = (1, 2, 2)$, von der Geraden g , $\vec{x}_g(\lambda) = \lambda(3, 1, 4)$, $\lambda \in \mathbb{R}$?
7. Nutzen Sie die senkrechte Projektion und die anschaulichen Idee, dass sich der Flächeninhalt eines von \vec{a}, \vec{b} erzeugten Parallelogramms durch 'Länge der Grundseite mal Länge der Höhe' ergibt. Zeigen Sie damit, dass das Quadrat des Flächeninhaltes gleich $\vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$ ist. Zeigen Sie damit, dass für zwei Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2)$ des \mathbb{R}^2 der Flächeninhalt des erzeugten Parallelogramms gerade $|a_1b_2 - a_2b_1|$ ist.

Aufgaben zum Wochenende (2)

Alle Koordinatensysteme seien kartesisch.

1. Berechnen Sie zu $\vec{a} = (1, 2, -2)$ und $\vec{b} = (2, 3, -1)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$: $|-3\vec{a}|$, $8\vec{a} \cdot (-3\vec{b})$, $\vec{a} \times (\vec{b} + 5\vec{a})$, $2\vec{a} \cdot (3\vec{b} \times (-5)\vec{c})$. Rechnen Sie möglichst praktisch, schreiben Sie insbesondere das letzte Resultat aufgrund Ihrer Kenntnis von $\vec{a} \times \vec{b}$ nach Ausrechnen eines einzigen Skalarproduktes direkt hin!
2. Seien $\vec{x}_P = (1, 2, 1)$, $\vec{x}_Q = (2, 1, 3)$, $\vec{x}_R = (3, -1, -2)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche das Dreieck PQR in dessen Schwerpunkt senkrecht durchstößt.
3. Geben Sie eine Normalenform für die mittelsenkrechte Ebene durch die Strecke von P nach Q , $\vec{x}_P = (1, 2, -1)$, $\vec{x}_Q = (3, -2, 1)$.
4. Geben Sie zur Ebene $\vec{x}_E = (1, 2, 2) + \lambda(2, 1, -1) + \mu(2, -3, 1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, eine Normalenform. Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen E und der xy -Ebene. Bestimmen Sie auch den Abstand zwischen E und dem Punkt P , $\vec{x}_P = (3, 4, 3)$. Spiegeln Sie E an der durch P gehenden parallelen Ebene. (Achten Sie darauf, was man als Resultat zur letzten Frage angeben sollte!)
5. Führen Sie auf der Ebene E , gegeben durch $2x - 3y + z = 1$, ein Orthonormalsystem ein, das heißt: Geben Sie zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren parallel zu E an, deren Länge gleich 1 ist. (Hinweis: Raten Sie einen, und gewinnen Sie den zweiten durch Anwendung des Vektorprodukts.) Wie können Sie nunmehr eine Kreisfläche auf E parametrisieren, deren Radius 5 und deren Mittelpunkt $(1, 1, 2)$ ist?
6. Berechnen Sie den Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden g, h , die sich also nicht schneiden und nicht parallel liegen, gegeben durch Parameterdarstellungen $\vec{x}_g(\lambda) = \vec{x}_P + \lambda\vec{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, sowie $\vec{x}_h(\mu) = \vec{x}_Q + \mu\vec{b}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Verfolgen Sie dabei diese Idee: Suchen Sie einen Vektor, der sich als Differenz $\vec{x}_g(\lambda) - \vec{x}_h(\mu)$ darstellen lässt und senkrecht auf beiden Geraden steht. Dessen Länge ergibt den gesuchten Abstand.
7. Geben Sie die Matrix für die Spiegelung an der yz -Ebene im \mathbb{R}^3 an.
8. Berechnen Sie Kern und Bild für die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, welche durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Hinweis: Erinnern Sie sich, dass der Kern von A einfach die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$ ist. Rechnen Sie diese aus, in Parameterform. Nunmehr wissen Sie über den Dimensionssatz, welche Dimension das Bild haben muss. Sie können nunmehr sofort eine Basis für das Bild von A angeben und damit eine Parameterdarstellung dafür.

9. Gegeben ist die Ebene E durch die Gleichung $2x - 3y + 4z = 1$. Es wirke eine Schwerkraft in Richtung des Vektors $(0, 0, -1)$. Auf den Punkt P , $\vec{x}_P = (4, 1, -1)$, der auf der Ebene liegt, wird eine Kugel gesetzt und rollt 'abwärts' gemäß der Schwerkraft. Auf welcher Halbgeraden mit Anfangspunkt P rollt die Kugel? Geben Sie dafür eine Parameterdarstellung. Hinweis: Einen passenden Richtungsvektor für die gesuchte Gerade erhalten Sie leicht, indem Sie den Vektor $(0, 0, -1)$ zerlegen in eine Vektor-Komponente parallel zum Normalenvektor der Ebene und eine Vektor-Komponente senkrecht zu diesem Normalenvektor. Sie können auch überlegen, wie Sie einen geeigneten Richtungsvektor über eine zweifache Vektorproduktanwendung erhalten.