Übung (2)

1. Welche der folgenden Gleichungen ist linear / quadratisch / Polynomgleichung / nichts davon in x? Lösen Sie die betreffenden Gleichungen im linearen und im (wesentlich) quadratischen Fall. Versuchen Sie sich daran, etwas zur Existenz und zur Berechenbarkeit von Lösungen in den anderen Fällen zu sagen. Schreiben Sie im Falle der Polynomgleichung auch die Normalform auf.

$$\begin{aligned} a^2 x (1-x)^5 &= x^3 \sin(a), \\ \sin(x-1) &= x \\ x\sin(a) - 2 &= (3-x)\cos^2(a) \\ \frac{a+1}{x} + x &= 1 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Deuten Sie zuvor die Aufgabe und ihre Lösung geometrisch (Skizze!) Sagen Sie damit voraus, wie viele Lösungen es geben sollte. Welchen Winkel bilden die (geraden) Asymptoten der durch die erste Gleichung beschriebenen Figur mit der $x-$ Achse?

3. Schreiben Sie folgende Summe aus: $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{k!} x^{2k}$.

4. Schreiben Sie folgende Summe mittels des großen Summenzeichens:

$$\frac{x}{4} - \frac{x^4}{6} + \frac{x^7}{8} - \frac{x^{10}}{10} + \frac{x^{13}}{12} - \frac{x^{16}}{14}$$

5. Rechnen Sie durch Umformen der linken nach, dass folgende Gleichung gilt: $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2$. (Denken Sie an die Grundformeln für das Rechnen mit großem Summenzeichen.) Geben Sie auch verbal eine Deutung dieser Größe, wenn Sie bereits wissen und bedenken: $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_i$ ist der arithmetische Mittelwert der Werte $x_1, ..., x_n$. (Denken Sie an Messwerte.)

6. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 8 Leute aus 12 Leuten auszuwählen? (Kürzen Sie den entstehenden Bruch so, dass Sie das Resultat im Kopf errechnen können.)

7. Den absoluten Fehler einer Messung einer Größe gibt man so an: Wahrer Wert der Größe minus Messwert. Der relative Fehler ist der Quotient: Absoluter Fehler geteilt durch wahren Wert (der dafür nicht Null sein darf). Bezeichnen wir den relativen Fehler mit r_w. In Ermangelung des wahren Wertes bildet man auch den relativen Fehler r_m, worin der Messwert anstelle des wahren Wertes in den Nenner gesetzt ist.

   (a) Warum bleibt bei Einheitenwechsel der relative Fehler unverändert? (Das sollten Sie verbal ordentlich begründen können.)

   (b) Geben Sie eine Formel für $r_w - r_m$, welche diese Größe in absolutem Fehler, wahrem Wert und Messwert ausdrückt.

8. Vom Punkt $(L, 0)$ aus sind die Tangenten an den Kreis mit Radius R und Mittelpunkt $(0, 0)$ zu ziehen, $L > R > 0$. Geben Sie die zugehörigen Geradengleichungen an. In welchem Winkel erscheint der Kreis von $(L, 0)$ aus bei $L = 10$ und $R = 1$? Hinweis: Nutzen Sie allgemeinen Ansatz für Geraden durch den Punkt $(L, 0)$ und formulieren Sie die Tangentenbedingung durch 'Berühren des Kreises', also Existenz eines einzigen Schnittpunktes mit dem Kreis.

Übung (3)

1. Für welchen Quotienten v/c mit positiven $v < c$ beträgt $l\sqrt{1 - v^2/c^2}$ gerade nur noch 1 Prozent von $l > 0$?

2. Skizzieren Sie die Lösungsmengen im $\mathbb{R}^2$ der folgenden Ungleichungen:

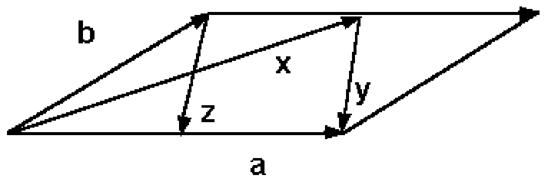
$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq 1 \\ x^2 + y^2 &\leq 1 \\ \max(|x|, |y|) &\leq 1 \end{aligned}$$

   Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit die Lösungsmenge von $\max(|x|, |y|) \leq a$ der Lösungsmenge von $|x|+|y| \leq 1$ genau einbeschrieben wird?

3. Machen Sie durch Ausschreiben der Summen klar, oder zeigen Sie gar induktiv folgende Gleichung: $(1 - x) \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 - x^{n+1}$. Beantworten Sie daraus intuitiv: Wohin streben für $n \to \infty$ im Falle von $|x| < 1$ die Summen $\sum_{i=0}^{n} x^i$?

4. Rechnen Sie nach, dass für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: Der Punkt $\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ liegt auf dem Einheitskreis, der durch $x^2+y^2 = 1$ beschrieben ist. Nunmehr betrachten Sie folgenden Weg, dahin zu gelangen: Schneiden Sie eine Gerade mit beliebiger Steigung m, welche durch den Punkt $(-1, 0)$ geht, mit dem Einheitskreis, und betrachten Sie den Schnittpunkt außer $(-1, 0)$. Welcher Teil des Kreises wird also bei der Parametrisierung $\vec{x}(t) = \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$ erfasst, und wie ist der Parameter t geometrisch zu deuten?

5. In der folgenden Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gegeben und die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ gesucht, also letztere in $\vec{a}, \vec{b}$ auszudrücken durch die geometrischen Vektorraumoperationen. Zu verstehen: Die ganze Figur ist ein Parallelogramm, $\vec{x}$ und $\vec{z}$ (genauer: deren hier gezeichnete Repräsentanten) stoßen auf den jeweiligen Seitenmittelpunkt.



6. Skizzieren Sie in der Ebene exemplarisch den geometrischen Gehalt der Aussage $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$. An welchen geometrischen Satz erinnert das?

7. Wie viele Zahlenangaben benötigen Sie jeweils, um zu beschreiben: Eine Richtung in der Ebene / eine Richtung im dreidimensionalen Raum / ein Dreieck in der Ebene mit genauer Lage / ein Dreieck in der Ebene als Figur mit genauen Maßen, abgesehen von der Lage in der Ebene / ein Dreieck als Form (abgesehen von seiner Größe) // eine Parabel mit genauer Lage im dreidimensionalen Raum?

Übung (4)

1. Zeichnen Sie in ein dreidimensionales rechtwinkliges Koordinatensystem K den Punkt P mit $\vec{x}_P = (-1, -2, 1)$ ein, mit vollem Quader.

2. Vorausgesetzt sei ein kartesisches Koordinatensystem. Ein Würfel der Kantenlänge $2a$, $a > 0$, liege achsenparallel mit Mittelpunkt in $(2, 3, -1)$.Beschreiben Sie vektoriell - Blickrichtung der Betrachtung sei die Negativrichtung der $x-$ Achse, 'oben' sei durch die Positivrichtung der $z-$ Achse bestimmt, 'rechts' durch die Positivrichtung der $y-$ Achse. Verwenden Sie natürlich eine Skizze.

   (a) Alle Eckpunkte - warum war es zweckmäßig, die Kantenlänge $2a$ zu nennen?

   (b) die obere Würfelseitenfläche,

   (c) die vom linken vorderen oberen Eckpunkt ausgehende Raumdiagonale des Würfels,

   (d) die Diagonale auf der rechten Würfelseitenfläche, welche vom Eckpunkt oben rechts ausgeht.

   (e) Versuchen Sie, alle Würfelseitenflächen auf einmal zu beschreiben. Verwenden Sie dazu die Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ und $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Hinweis: Bilden Sie Summen dieser Vektoren mit geeigneten Vorfaktoren (Koeffizienten), und vergessen Sie die Lage des Würfelmittelpunktes nicht.

3. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade durch P und Q, $\vec{x}_P = (3, -4)$, $\vec{x}_Q = (2, 3)$. Geben Sie diese Gerade auch in der Gleichungsform an. Welchen Mittelpunkt hat die Strecke $\overline{PQ}$?

4. Was wird aus dem Kreis mit Mittelpunkt $(2, 3)$ und Radius 4, wenn man alle Ortsvektoren der Kreispunkte mit Faktor 10 streckt? (Nehmen Sie nur die Kreiskurve.)

5. Setzen Sie ein kartesisches System voraus. Beschreiben Sie in Gleichungsform und in Parameterform die Ellipse in der Ebene, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt und deren Achsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen, mit kleiner Halbachse der Länge 2 in $x-$ Richtung, großer der Länge 4 in $y-$ Richtung. Verschieben Sie nun diese Ellipse parallel, so dass der Mittelpunkt in $(2, 3)$ landet. Geben Sie für diese Ellipse nunmehr die Beschreibungen in Gleichungs- und in Parameterform. Achten Sie auf einen charakteristischen Unterschied bei den anzubringenden Veränderungen.

6. Vom Punkt $(0, 0, 10)$ fallen Lichtstrahlen auf die $xy-$ Ebene. Wie sieht der Schatten des Kreises mit der Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = (2 + \cos(t), 3 + \sin(t), 3)$, $0 \leq t < 2\pi$, auf der $xy-$ Ebene aus? Hinweis: Schneiden Sie dazu jeden Lichtstrahl durch den beliebigen Kreiskurvenpunkt $\vec{x}\,(t)$ mit der $xy-$ Ebene.

Aufgaben zum Wochenende (1)

1. Ein pythagoreisches Zahlentripel ist ein Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ derart, dass $x^2 + y^2 = z^2$. Zeigen Sie (d.h. rechnen Sie nach!), dass mit beliebigen ganzen Zahlen d, u, v stets $x = d\left(u^2 - v^2\right)$, $y = 2duv$, $z = d\left(u^2 + v^2\right)$ ein pythagoreisches Tripel bildet.

2. Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-1} = 5$. Hinweis: Machen Sie durch zweimaliges Quadrieren (jeweils eine Wurzel isolieren!) eine quadratische Gleichung daraus. Schauen Sie aber anschließend nach, welche der Lösungen der quadratischen Gleichung auch solche der ursprünglichen Gleichung sind.

3. Schneiden Sie die Kegeloberfläche $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $R > 0$. Geben Sie für das entstehende Schnittgebilde eine Parameterdarstellung. Was ist das Schnittgebilde genau? (Erinnern Sie sich an die zweckmäßige Einsetzungstechnik für derlei Aufgaben.)

4. Seien $\vec{x}_P = (4, 1, -2)$, $\vec{x}_Q = (1, 3, 2)$.

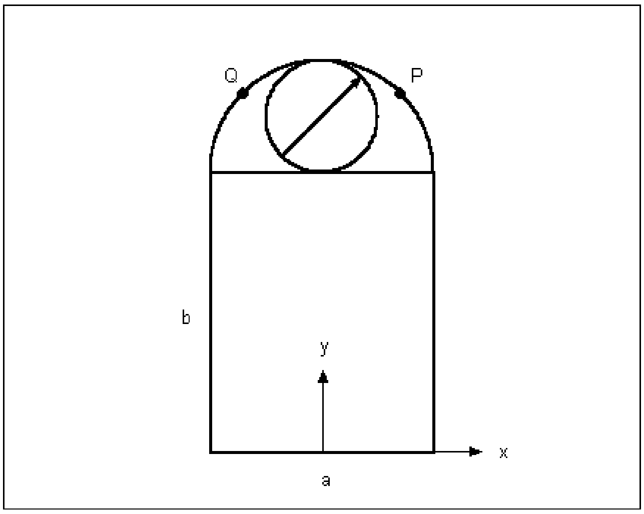
   (a) Welche Punkte liegen auf der Strecke zwischen P und Q und teilen die Länge dieser Strecke im Verhältnis $2 : 1$?

   (b) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade h, die parallel zu der Geraden durch P und Q verläuft und auf der S liegt, $\vec{x}_S = (3, 5, -2)$.

   (c) Welche Gerade liegt genau in der Mitte zwischen h und der Geraden g, welche durch P und Q geht?

   (d) In welchem Punkt schneidet die Gerade g die Ebene, welche durch $2x + y - z = 1$ gegeben wird?

5. Betrachten Sie folgende Skizze (das Koordinatensystem ist kartesisch, und der Kreis ist einem Halbkreis einbeschrieben, der eingezeichnete freie Vektor bilde einen Winkel von 45 Grad mit der $x-$ Achse, die Punkte P, Q haben offensichtliche Lage, a und b bezeichnen Längen. Geben Sie die Koordinatendarstellungen für P, Q und den eingezeichneten Vektor. Parametrisieren Sie den einbeschriebenen Kreis.



6. Entscheiden Sie bei folgenden Darstellungen von Punktmengen, ob es sich um Darstellung durch Parametrisierung oder um Darstellung durch Gleichung(ssystem) handelt, entscheiden Sie weiter, welche Dimension das beschriebene Gebilde hat und ob es sich jeweils um ein lineares ('gerades') oder nichtlineares ('krummes') Gebilde handelt. Skizzieren Sie alle Gebilde von a bis f. Beschreiben Sie Gebilde b. in beiden üblichen Formen, auch g. in ordentlicher Form. (Was haben die Ungleichungen jeweils zu bedeuten?)

a. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (\lambda, 1-2|\lambda|)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \lambda \leq 1$. b. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda) = (3-2\lambda, 2+5\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. c. Im $\mathbb{R}^2$: $2x = y^2$. d. Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = \lambda(2,1) + \mu(3,4)$, $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$. e. Im $\mathbb{R}^3$: $z = x^2 + y^2 + 1$ *und* $1 \leq z \leq 3$. f. Im $\mathbb{R}^3$: $z \geq x^2 + y^2 + 1$ *und* $1 \leq z \leq 3$. g. Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{x}(\lambda, \mu) = (2\lambda + \mu + 1, 2\lambda + 3\mu - 1, \lambda + \mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.