Übungen (17)

(1) (a) Berechnen Sie folgende Integrale:

$$\int \frac{x}{(x-1)^5}dx, \quad \int \ln\left(\sqrt{x}\right)dx, \quad \int \frac{1}{1+e^{2x}}dx, \quad \int \frac{1}{1-x}dx$$

(b) Berechnen Sie

$$\frac{x}{(x^2-1)^4}dx, \quad \int \frac{x^2+1}{x}dx, \quad \int \frac{x}{(x-1)(x-2)}dx$$

(c) Berechnen Sie mit partieller Integration $\int (1-x)\sin(x)dx$.

(2) Welchen (vektoriellen!) Mittelwert erhalten Sie für die Gesamtheit der Vektoren $\alpha\vec{x}_P+(1-\alpha)\,\vec{x}_Q$, $0\leq\alpha\leq 1$? Entspricht Ihr Resultat den Erwartungen?

(3) Für welchen Bereich von $a\in\mathbb{R}$ haben die Funktionen $f_a(x)=x+a\sin(x)$ kein Extremum?

(4) Welchen maximalen Abstand (gemessen in Richtung der $y-$ Achse) gibt es zwischen dem Graphen von sin und dem von cos?

(5) Hat die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n=\int_0^\pi \sin(nx)dx$ einen Grenzwert?

(6) Warum hat $f(x)=e^{-x}-x$ keine Extrema? Wie sieht der Graph aus? Eine einfache Asymptote für $x\to\infty$ für den Graphen?

(7) Die Funktion f sei im betrachteten Bereich überall differenzierbar, es gelte $f(2)=-1$ und überall $f'(x)=(3x-4)^4$. Welchen Wert hat $f(10)$?

(8) Geben Sie die Schnittpunkte und die jeweiligen Schnittwinkel für die Lösungsmengen der Gleichungen $y=2x+1$ und $y=\frac{1}{x}$. Skizzieren Sie diese Mengen und vergewissern sich vorab darüber, wie viele Schnittpunkte es gibt.

(9) Kann man die Funktion $f(x)=(\sin(x)-\cos(x))^2$ als lineare Transformation der Funktion $g(x)=\sin^2(x)$ auffassen und die Graphen entsprechend geometrisch ineinander überführen?

(10) Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

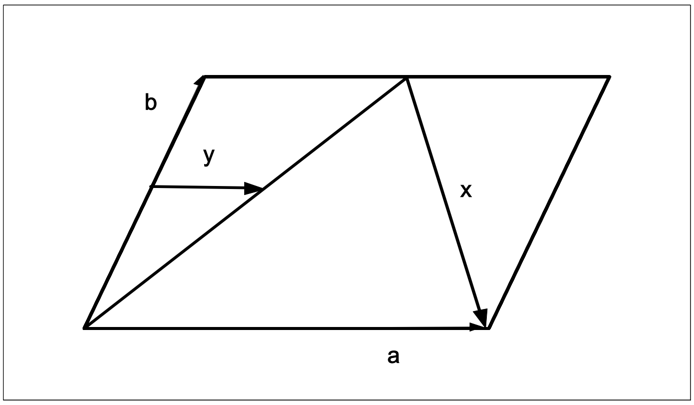
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 2x+2y+3z&=2\\ 6x-4y+5z&=4 \end{aligned}$$

Beachten Sie: Im Falle einer unendlichen Lösungsmenge ist eine ordentliche Parameterdarstellung zu geben. Weitere Fragen, die Sie ohne weitere Rechnung beantworten können sollten: Wie lautet die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems? Wie steht es mit der linearen Unabhängigkeit der Zeilenvektoren / Spaltenvektoren der zugehörigen Matrix? Welche Vektoren z.B. spannen das Bild der von der Matrix dargestellten linearen Abbildung auf?

(11) Geben Sie eine Normalenform für die Tangentialebene an den Ellipsoiden $x^2+y^2+2z^2=4$ im Punkt $(1,1,1)$.

(12) Rechnen Sie zu den Vektoren $\vec{a}=(2,3,-2)$ und $\vec{b}=(3,3,-3)$ und $\vec{c}=(1,1,1)$ aus: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $\vec{a}\times\vec{b}$, dazu $\vec{b}\,(\vec{c}\times\vec{a})$, ohne dafür erneut ein Vektorprodukt zu berechnen. Rechnen Sie den Abstand aus, den die Ebene parallel zu $\vec{a},\vec{b}$, welche durch den Punkt $(1,2,2)$ geht, vom Ursprung hat.

(13) Betrachten Sie folgende Skizze:



Drücken Sie die unbekannten Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aus durch die voregebenen $\vec{a}, \vec{b}$. Setzen Sie dabei voraus: Obere und linke Parallelogrammseite werden durch die Konfiguration genau halbiert, der Vektor $\vec{y}$ ist parallel zu $\vec{a}$.

(14) Schneiden Sie die Ebene durch die Punkte P, Q, R, $\vec{x}_P = (1,2,-3)$, $\vec{x}_Q = (1,2,2)$, $\vec{x}_R = (-2,1,-1)$, mit der Ebene, welche durch $2x - y + z = 1$ beschrieben ist.

(15) Sie haben eine Kreiskurve mit Mittelpunkt $(2,3)$ und Radius 2, eine andere mit demselben Mittelpunkt und Radius 4. Beschreiben Sie die Menge aller Punkte zwischen diesen beiden Kurven (Parameterform!).

(16) Eine Kreiskurve hat Mittelpunkt $(2,3)$ und Radius 2, eine andere Kreiskurve hat Mittelpunkt $(5,-8)$ und Radius 4. Wie kann man sofort überblicken, ob sich die Kurven schneiden? Was ist der Abstand zwischen den Kurven? Geben Sie in Gleichungsform die Gerade an, welche keinen der Kreise schneidet und von beiden Kreisen gleich weit entfernt ist.

(17) Seien x_i, $1 \leq i \leq n$, irgendwelche reellen Zahlen. Seien p_i, $1 \leq i \leq n$, Zahlen, so dass $p_i > 0$ für alle i und $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Man denke an die inhaltliche Interpretation: Ein Zufallsexperiment wird gemacht, und es kommt der Wert x_i mit Wahrscheinlichkeit p_i heraus, $1 \leq i \leq n$. Für welchen Wert von α wird dann $\sum_{i=1}^n (x_i - \alpha)^2 p_i$ minimal? Was ist die inhaltliche Bedeutung dieses Wertes und des so minimalisierten Funktionswertes?

(18) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ von $f(x) = \frac{\sin(2x)}{1-x^2}$.

(19) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|, |y|$ von $g(x,y) = x^2 y - e^{2y}$.

(20) Bestimmen Sie $\lim_{x \to 2}((x-2)\left(\ln(x-2) + 2x^2\right))$. Hinweis: Schreiben Sie den Ausdrcuk in geeigneter Weise als Quotienten, um die de L'Hospitalsche Regel anwenden zu können.