Übung (13)

(1) Bilden Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}, \qquad \frac{d}{dx}\sin(\ln(x)), \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}, \quad \frac{d}{dx}\arctan(x^3-1).$$

(2) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für den Ausdruck $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ für $v^2 << c^2$. (Welche Funktion ist zu betrachten?) Welche Stelle hinter dem Komma wird bei der Näherung erst falsch, wenn $v = c/100$?

(3) Verwenden Sie die Regel zur Ableitungen von Umkehrfunktionen, um die Ableitung von $\tanh^{-1}$ zu berechnen, also des hyperbolischen Arcustangens. Sie benötigen dazu nur: $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ und $\sinh'(x) = \cosh(x)$ sowie $\cosh'(x) = \sinh(x)$. Hinweis: Berechnen Sie zunächst $\tanh'(x)$ ausgedückt in $\tanh(x)$. (Übrigens ist $\sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, aber das braucht man nur zu wissen, um die angegebenen Gleichungen für $\sinh'$ und $\cosh'$ zu verifizieren, was Sie tun sollten.)

(4) Warum ist das Problem des Auftretens von Extrema für eine Funktion wie $f(x) = \sqrt{|x|}$ (Definitionsbereich $\mathbb{R}$) nicht mittels der Ableitung zu lösen? Hat die Funktion ein Minimum / absolutes Minimum? Hat die Funktion $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$ein absolutes Maximum? Und was ist mit der Ableitung?

(5) Hat die Funktion $g(x) = x - x^3 - 1$ (im Definitionsbereich $\mathbb{R}$) ein lokales Minimum / Maximum? Hat sie ein absolutes Minimum / Maximum?

(6) Wo hat der Graph zu $f(x) = e^{-x^2}$ seine Wendepunkte? *Folgern* Sie daraus, wo die Wendpunkte zu $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ liegen - rechnen Sie dazu nicht erneut aus, sondern fassen Sie $e^{-\frac{1}{2}x^2}$nach geeigneter Umformung als lineare Transformation von e^{-x^2} auf.

(7) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der folgenden Parabel, indem Sie die Bedingung $\vec{x}'(t)\vec{x}''(t) = 0$ nutzen: $\vec{x}(t) = (2, 1, 1) - t\,(3, 2, -2) + \frac{1}{2}t^2\,(2, 1, -3)\,,\ t \in \mathbb{R}$.

(8) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes vom endlichen Zuwachs, dass für $x \geq 0$ stets $\arctan(x) \leq x$ gilt.

(9) Bilden Sie Funktionen, deren Graphen symmetrisch zur $y-$ Achse liegen, deren Werte vom Wert 1 an der Stelle $x = 0$ zu beiden Seiten abfallen gegen Null, jedoch so, dass um $x = 0$ herum ein beliebig breites praktisch flaches Plateau (also Werte darauf nahezu konstant, kaum von 1 abfallend) entsteht, das dann (beliebig) steil zu beiden Seiten nach Null abfällt. Beschreiben Sie dazu, welche Elemente Ihres Rechenausdrucks für das 'beliebig breit' einerseits und für das 'beliebig gut der Flachheit angenähert' (auf der Rampe) sowie für das 'beliebig steil' beim Abfall verantwortlich sind. Hinweis: Die Potenzfunktionen x^{2n} im Bereich $[-1; 1]$ sind ein guter Ausgangspunkt.

Übung (14)

(1) Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}\,(t) = (\cos t, \sin 2t)\,,\ 0 \leq t < 2\pi$. Wie sieht die Bahn aus? Für welche Werte von t gilt $\vec{x}\,(t) = (0,0)$? Geben Sie für diese beiden Zeitpunkte die Geschwindigkeitsvektoren an. Welchen Winkel bilden sie mit der $x-$ Achse?

(2) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+\tan(x)}$. Achtung: Nicht alle Definitionslücken verhalten sich hier gleich - erkennen Sie zwei Typen. Stellen Sie für f auch einmal quantitativ die Lage der Wendepunkte fest. Sie können die Steigung bei den Nullstellen (?!) mittels de L'Hospitalscher Regel feststellen.

(3) Welches Rechteck mit zwei Punkten auf der $x-$ Achse und zwei Punkten auf dem Graphen zu $f(x) = e^{-x^2}$ hat maximalen Inhalt? Hinweis: Es ist wichtig, dass Sie jedes derartige Rechteck mit einer einzigen reellen Zahl beschreiben und dann den Flächeninhalt als Funktion eben dieser reellen Variablen. Dann führt das übliche 'Extremwert'-Schema sofort zum Resultat.

(4) Modifizieren Sie die Schraubenlinie $\vec{x}\,(t) = (\cos t, \sin t, t)\,,\ t \in \mathbb{R}$, derart, dass die resultierende Schraubenlinie die $xy-$ Ebene in einem Winkel von 30 Grad durchstößt.

(5) Geben Sie zum Skalarfeld $f(x,y) = xy + x^2$ den Gradienten an der Stelle $(1,3)$ an. Beschreiben Sie in Gleichungsform und auch in Parameterform die Normale zur Niveaukurve, welche durch $(1,3)$ geht. Skizzieren Sie auch diese Niveaukurve.

(6) Begründen Sie sorgfältig: Wenn f in x_0 differenzierbar ist und $f(x_0) > 0$, dann gibt es eine Umgebung von x_0, in der global $f > 0$ gilt.

(7) Sei $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie mittels der de L'Hospitalschen Regel, dass $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$. Warum ist für die Frage nach $\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan(x)}{\arctan(1/x)}$ die de L'Hospitalsche Regel *nicht* anwendbar? Rechnen Sie nach, dass fälschliche Anwendung tatsächlich ein falsches Resultat ergäbe - welches genau? -, und nennen Sie das richtige Ergebnis.

Übung (15)

(1) Geben Sie eine obere Schranke für $\int_{-2}^{2} \arctan^2(x)dx$ anhand der Flächendeutung.

(2) Welchen Wert muss $\int_{-2}^{2} \frac{\sin(x)}{1+x^4}dx$ haben (wiederum anhand der unmittelbaren geometrischen Interpretation)?

(3) Warum muss der Wert des Integrals $\int_0^1 \frac{e^{-2x^2}+x^{11}}{1+x^4+2x^8}dx$ positiv sein? (Versuchen Sie nicht etwa eine exakte Ausrechnung des Integrals - das geht nicht.)

(4) Stellen Sie mittels Integration fest, dass in beliebigem Intervall voller Periodendauer der Mittelwert von $a\cos(\omega t+\varphi)+b$ gleich b ist.

(5) Welchen Mittelwert hat $\frac{1}{1+x^2}$ im Bereich $[0;1]$?

(6) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int_{-2}^{2}\left(1+x^2\right)dx$, $\int_0^{\pi/2}\left(e^x-3\cos(x)-\sqrt{x}\right)dx$.

(7) Berechnen Sie $\int_0^1 \sin(10t)\,dt$, $\int \frac{2}{x+1}dx$, $\int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$, $\int (2x-1)^{90}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}}dx$.

(8) Berechnen Sie folgende Integrale: $\int x\sin(x)dx$, $\int x\sqrt{1-x^2}dx$, $\int \cos(x)\ln(1+\sin(x))\,dx$. Benutzen Sie für letzteres Integral, dass Sie bereits wissen: $\int \ln(x)dx = x\ln(x)-x$.

(9) Eine Bewegung verlaufe mit der Beschleunigung zur Zeit t : $\vec{b}(t) = t\,(1,1,0)$. Zur Zeit $t=0$ befinde man sich am Ort $(1,1,1)$ und habe die Geschwindigkeit $(0,0,1)$. Stellen Sie die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion $t\mapsto \vec{v}(t)$ und die zugehörige 'Weg-Zeit-Funktion' $t\mapsto \vec{s}(t)$ auf.

Übung (16)

(1) Berechnen Sie $\int dx \ln\left(x^2\right)$, $\int \frac{dx}{2+3x^2}$.
(2) Berechnen Sie $\int \frac{dx}{(x+1)(x-1)(x+2)}$, $\int \frac{dx}{e^x(1-e^x)}$, $\int dx \frac{1}{x(x^2+1)}$.
(3) Berechnen Sie $\int xe^{-2x}dx$, $\int \sqrt{x}\ln(x)dx$.
(4) Berechnen Sie $\int dx \frac{\ln(2x)}{x}$, $\int x\ln\left(1+x^2\right)dx$, $\int dx\sqrt{1-2x^2}$.
(5) Hausaufgabe: Rechnen Sie das Integral $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ numerisch mittels Taschenrechners oder besser Computers so aus, dass Sie sicher sind, dass die zweite Stelle hinter dem Komma korrekt ist. Hinweis: Arbeiten Sie dazu mit Ober- und Untersummen.
(6) Geben Sie eine Näherungslösung für die Gleichung $\tan(x) = x$ im Bereich $]\pi/2, 3\pi/2[$. Nutzen Sie das Newtonverfahren, und sichern Sie die Korrektheit von drei Stellen hinter dem Komma.
(7) Diskutieren Sie die Schar der Niveaukurven des Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$. Hinweis: Für alle Feldwerte $c \neq 0$ können Sie eine Funktionenschar daraus machen. Schreiben Sie die auf, in angemessener Endform. Warum klappt das für den Feldwert $c = 0$ nicht? Wie sieht die Niveaukurve zum Feldwert Null aus? Behandeln Sie auch für alle die besagte Funktionenschar allgemein die Extremwertfrage.
(8) Man misst die Länge und die Breite eines Rechtecks zu (x_0, y_0), jedoch mit Fehlern $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$. Also: Der korrekte Wert der Länge liegt im Intervall $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$, analog der korrekte Wert für die Breite im Intervall $[y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y]$. Geben Sie in Näherung 1. Ordnung den Maximalfehler für den mit den ungenauen Messwerten zu $x_0 y_0$ ungenau bestimmten Flächeninhalt an. Setzen Sie nunmehr $x_0, y_0 > 0$ voraus, und geben Sie eine Formel für den relativen Fehler beim Flächeninhalt an.

Aufgaben zum Wochenende (4)

(1) Betrachten Sie die Schar von Funktionen $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 e^{ax}$. Dabei sei $a \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Schar (es genügt eine grobe Skizze einiger Exemplare mit der Andeutung, was eine Veränderung von a bewirkt). Insbesondere sollten Sie die Lage eventueller Extrema in Abhängigkeit von a darstellen.

(2) Was ist der (vektorielle!) Mittelwert der Vektoren $\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $0 \le t \le \pi/4$? Können Sie dem einen physikalischen Sinn geben?

(3) Wie sehen die Niveauflächen des Skalarfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2x - 3y + 4z$, aus?

(4) Skizzieren Sie die Niveaukurven zum Skalarfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + xy$.

(5) Geben Sie eine Normalenform für die Tangentialebene an die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ im Kugelpunkte $2\left(\frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{4}\sqrt{6}, \frac{1}{2}\right)$. Rechnen Sie auch nach, dass das ein Kugelpunkt ist.

(6) Geben Sie zur Funktion $f(x) = 2x^2 - 3x^3 + 1$ eine nach Mittelwertsatz existierende Zahl $\xi \in]0, 2[$ konkret an, so dass $f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$ wird. Wie viele derartige Zahlen gibt es in diesem Fall?

(7) Berechnen Sie folgende Integrale, achten Sie darauf, dass man bei einem bestimmten Integral eventuell den Wert sagen kann, ohne eine Stammfunktion ausrechnen zu müssen.

   (a) $\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) dx$, $\int_0^3 \sqrt[5]{x} dx$, $\int_{-1}^1 x^2 \sin^3(x) dx$, $\int_0^\pi \cos(4x) dx$.

   (b) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{-3x+1}} dx$, schreiben Sie nun auch den Integranden von $\int \sin(x)\cos(x) dx$ so um, dass Sie $1/\alpha-$ Regel verwenden können (Additionstheoreme!). Rechnen Sie damit das unbestimmte Integral aus.

   (c) $\int \frac{x}{(x-1)(x+2)} dx$

   (d) (Umkehrung der Kettenregel:) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x}) dx$, $\int \sin(x)\cos(x) dx$ (vergleichen Sie das Resultat mit dem oben gewonnenen - Kommentar?).

(8) Berechnen Sie $\int_0^\infty e^{-x/3} dx$. Existiert $\int_0^1 \ln(ax) dx$? ($a > 0$ Parameter.)

(9) Rechnen Sie als Volumen eines Rotationskörpers das Volumen eines geraden Kreiskegels der Höhe h mit Öffnungswinkel $\pi/3$ aus. (Der Winkel zwischen Mantellinie und Achse ist also $\pi/6$). Hinweis: Zunächst haben Sie eine geeignete Funktion zu definieren, deren Graph um die $x-$Achse zu rotieren ist. Sie sollten Ihr Resultat durch Vergleich mit der bekannten Volumenformel $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ verifizieren, wobei r der Radius des Grundflächenkreises ist.