# Übung (9)

(1) Gegeben sind $\vec{x}_P, \vec{x}_Q$, $P \neq Q$. Geben Sie die Ortsvektoren der Zwischenpunkte, welche die Strecke $\overline{PQ}$ dritteln.

(2) Behandeln Sie folgendes Problem allgemein, überlegen Sie für beide Fragen, was vernünftigerweise gegeben sein sollte: Stellen Sie sich die Ebene $E$ als undurchsichtig vor. Kann man dann von $P$ aus $Q$ sehen? (Finden Sie eine Lösung des Problems mittels der Parameterform für $E$, dann aber auch mittels einer Normalenform für $E$.)

(3) Die Drehachse einer Drehscheibe stehe senkrecht auf der $xy-$ Ebene und bewege sich im Raum entlang der Geraden $y = x$ in der $xy-$ Ebene, und zwar mit konstanter Geschwindigkeit $(1, 1, 0)$. Zur Zeit $t = 3$ gehe die Drehachse durch den Koordinatenursprung. Die Drehscheibe bewege sich stets parallel zur $xy-$ Ebene. Zur selben Zeit $t = 3$ befinde sich ein Punkt auf der Scheibe an der Stelle $(4, 0, 5)$ . Die Scheibe drehe sich 'von oben' - im Sinne der positiven $z-$ Richtung gesehen im Uhrzeigersinn vier mal pro Zeiteinheit gleichmäßig. Beschreiben Sie die Bewegung des Punktes auf der Scheibe in der Zeit.

(4) Rechnen Sie zu $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 4)$, $\vec{c} = (1, 2, -2)$ aus: $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $3\vec{c}\left(2\vec{b} \times (-5)\vec{a}\right)$, Determinante der Matrix mit den Zeilenvektoren (in dieser Reihenfolge!): $2\vec{b}, 3\vec{c}, -5\vec{a}$ - tun Sie das möglichst praktisch, deuten Sie die Resultate geometrisch.

(5) Vereinfachen Sie: $(2\vec{x} + 3\vec{y}) \times (4\vec{y} - 5\vec{x})$.

(6) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\left(\left(-3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \left(5\vec{c} - 3\vec{a} + 4\vec{b}\right)\right)$.

(7) Von welchen beiden der drei beteiligten Vektoren ist $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ eine Linearkombination? Finden Sie die Koeffizienten heraus?

(8) Warum ist $\left(\vec{a}^2\vec{b}^2\right)$ nicht dasselbe wie $\left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$? Geben Sie zunächst ein einfaches Beispiel, das dies zeigt. Zeigen Sie nunmehr, dass $\vec{a}^2\vec{b}^2 - \left(\vec{a}\vec{b}\right)^2$ das Quadrat des Flächeninhaltes von dem Parallelogramm ist, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

(9) Seien zwei windschiefe Geraden ('windschief': nicht parallel und ohne Schnittpunkt) gegeben durch Parameterdarstellungen $\vec{x}_g(\alpha) = \vec{x}_P + \alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\vec{x}_h(\beta) = \vec{x}_Q + \beta\vec{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entwickeln Sie eine Formel zur Berechnung des Abstandes zwischen $g$ und $h$. Nutzen Sie dabei folgende Idee: Der Abstand wird richtig gemessen durch die Länge eines Vektors, der senkrecht zu beiden Geraden steht (also ein Vielfaches des Vektorproduktes ist!) und genau eingespannt werden kann zwischen einen Punkt auf der einen Geraden und einen Punkt auf der andern Geraden.

# Übung (10)

(1) Rechnen Sie mittels des Additionstheorems exakt $\sin(\pi/12)$ aus. Hinweis: Drücken Sie dazu $1/12$ geschickt als Summe aus - denken Sie daran, dass Sie $\sin(\pi/3), \sin(\pi/4)$ exakt kennen!

(2) Schreiben Sie mit Additionstheorem Gleichungen für $\sin(x+y)$ und $\sin(x-y)$ hin. Addieren Sie diese Gleichungen, und gewinnen Sie eine (später nützliche!) Umformung für $\sin(x)\cos(y)$.

(3) Geben Sie alle Minima der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 3\sin(5x - 1)$.

(4) Geben Sie *alle* Lösungen der Gleichung $\sin(x) = 0.7$ *exakt* an. Hinweis: Sie benötigen dabei den Ausdruck $\arcsin(0.7)$ - den kann man nicht exakt vereinfachen!

(5) Skizzieren Sie grob die Graphen der Funktionen mit den Rechenausdrücken $|\sin(x)|$, $\sin|x|$, $\sin^2(x)$, $\sin(x^2)$, $x\sin(x)$. Stellen Sie Symmetrien ausdrücklich fest.

(6) Sei $f$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Formulieren Sie mit einer Gleichung die Bedingung: 'Der Graph von $f$ liegt punktsymmetrisch zum Punkt $(a,b)$.'

(7) Sei $f$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion. Geben Sie eine Parameterdarstellung für den Graphen von $f$. Nunmehr parametrisieren Sie auch die Punktmenge, die man erhält, wenn man den Graphen von $f$ mit dem Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. parallel verschiebt. Geben Sie einen (möglichst einfachen) Ausdruck für die Funktion an, deren Graph diese neue Punktmenge ist. Führen Sie dasselbe Programm durch mit der geometrischen Operation: 'Stauchen des Graphen von $f$ längs der $x-$ Achse (mit Festlassen der $y-$ Achse)' mit Faktor $\alpha > 0$.

(8) Geben Sie ein Polynom 2. Grades an, dessen Graph die Punkte $(a,0)$, $(a+b,0)$, $(a+b/2,h)$ enthält. Dabei sei $b > 0$, $a,h \in \mathbb{R}$. Tun Sie das nicht über langweiliges Lösen eines Gleichungssystems, sondern nutzen Sie die leichten Veränderungen.

(9) Analysieren Sie den Ausdruck $\sin(x^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2(2x+1))$ (Baumdiagramm).

# Übung (11)

(1) Was bedeutet die Formel $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ für den geometrischen Zusammenhang des Graphen zu $\ln(ax)$ mit dem Graphen zu $\ln(x)$? Welche *andere* geometrische Operation mit dem Graphen zu $\ln(x)$ liefert *ebenfalls* den Graphen zu $\ln(ax)$?

(2) Lösen Sie die Gleichungen $2^{2x+1} = 10$ und $\log_3(x) = 5$.

(3) Wenn eine gedämpfte Schwingung die Form $e^{-2t}\sin(3t)$ hat - in welchen Zeitabständen halbiert sich dann die Amplitude?

(4) Wenn sich bei exponentiellem Zerfall (etwa radioaktiv) eine Halbierung alle 100 Jahre ergibt - nach welcher Zeit ist das ursprüngliche Material auf 1 Prozent reduziert?

(5) Diskutieren Sie die Funktionen $f_{a,b}(x) = \frac{e^{a(x-b)}}{1+e^{a(x-b)}}$. $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$. Was ist die einfache Grundgestalt, und was bewirken die Parameter $a, b$? Skizzieren Sie grob typische Graphen. Rechnen Sie nach, dass der Graph von $f_{1,0}$ punktsymmetrisch zum Punkt $(0, 1/2)$ liegt.

(6) Konstruieren Sie eine Funktion, welche den zeitlichen Verlauf einer Schwingung darstellt, deren Amplitude periodisch auf- und abschwillt.

(7) Skizzieren Sie grob die Graphen zu folgenden Funktionen - sie sollten sämtlich in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich der jeweiligen Vorschrift genommen werden; geben Sie diesen Definitionsbereich jeweils an (vergessen Sie auch nicht, nach etwa vorhandenen Standard-Symmetrien zu fragen):
   (a) $f(x) = x^2 e^{-x}$
   (b) $g(x) = \sqrt{-2x-3}$
   (c) $h(x) = x\sqrt{1-x^2}$
   (d) $k_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $k_2(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $k_3(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$
   (e) $l(x) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

(8) Ist die Funktion $f(x) = \sin(3x) + 2\cos(4x)$ periodisch? (Begründete Antwort!)

# Übung (12)

(1) Schreiben Sie die Tangentenzerlegung für die Funktion $f(x) = 2\,(3x-5)^4$ an der Stelle $x_0 = 2$ auf, und ermitteln Sie nach Prüfung des Restterms damit $f'(2)$. Nun geben Sie damit die Näherung 1. Ordnung für $f(1.99)$. Geben Sie den absoluten und den relativen Fehler der Näherung an.

(2) Berechnen Sie folgende Ableitungen:

(a) $\frac{d}{dx}\left(e^x + 5\sqrt[4]{x^3} + x^e + \ln(x) - 3\sin(x)\right)$

(b) $\frac{d}{dx}\sin(-3x)$, $\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \varphi)$, $\frac{d}{dx}\left(-2x+1\right)^5$

(c) $\frac{d}{dx}(x^a\tan(x))$, $a \in \mathbb{R}$. (Nutzen Sie, dass Sie $\tan' = 1 + \tan^2$ schon kennen.)

(d) $\frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$, $\frac{d}{dx}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[4]{(x+1)^5}}$ - in welchem Falle sollte man hier die Quotientenregel anwenden, in welchen Fällen nicht?

(e) $\frac{d}{dx}\frac{e^x}{\sin(1)}$, $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)$; skizzieren Sie auch den Graphen der letzteren Funktion, und nutzen Sie die Ableitung, um das Steigungsverhalten bei $x = 0$ und für $x \to \infty$ zu klären. - Rechnen Sie auch den Extremwert aus.

(f) $\frac{d}{dx}\left(1-2x^2\right)^2$ (Kettenregel!)

(g) $\frac{d}{dx}\sin^3(x)$ (was ist beim Graphen qualitativ anders als bei sin, und wie äußert sich das in der Ableitung?)

(h) $\frac{d}{dx}\sqrt{\alpha x^2 + 1}$, $\alpha$ reellwertige Konstante (Wohin geht die Steigung der Funktion $x \mapsto \sqrt{\alpha x^2+1}$ bei $\alpha < 0$ für $x$ gegen die Ränder des Definitionsbereiches?)

(i) $\frac{d}{dx}\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$

(j) $\frac{d}{d\alpha}\frac{x}{(x+\alpha)^2(x-2)}$ (Achtung, nach $\alpha$ ist abzuleiten!)

(k) $\frac{d}{dx}\log_3(x)$, $\frac{d}{dx}a^x$ $(a > 0)$.

(3) Wohin geht die Steigung des Graphen von $f(x) = \ln^2(x)$ für $x \to \infty$? Was bedeutet das graphisch?

(4) Wie sieht der Graph aus zu $g(x) = e^{\sin(x)}$? (Geben Sie eine grobe Skizze). Wo liegen die Maxima? Überlegen Sie das direkt, verifizieren Sie es auch über die 1. Ableitung.

(5) Geben Sie die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ bei dem Ausdruck $\ln\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$. Und wie lautet die Näherung 1. Ordnung für kleine $|x|$ bei $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{1}{1+\sin x}\right)$?

# Aufgaben zum Wochenende (3)

**Erster Block: Wiederholungen zur Vektorrechnung**

(1) Schreiben Sie für die Ebene, welche durch $\vec{x}_E(\alpha,\beta) = (1,2,2)+\alpha\,(2,-1,2)+\beta\,(2,3,-1)\,,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, gegeben ist, eine Normalenform auf. Schreiben Sie auch eine *andere Parameterdarstellung für dieselbe Ebene* auf, in der keiner der konstanten Vektoren mehr der alte ist!

(2) Schneiden Sie die Ebene $F$, welche durch die Gleichung $2x-y+z=1$ gegeben ist, mit der Parabel $\vec{x}(t) = (1,1,1)+t\,(1,-2,1)+t^2\,(2,-1,-1)\,,\ t\in\mathbb{R}$. Zusatzfrage: Beschreiben Sie die Ebene, in welcher die Parabel liegt.

(3) (Kartesisches System!) In der $xy-$ Ebene liegt achsenparallel ein Quadrat der Kantenlänge $2a$, $a>0$, mit dem Mittelpunkt im Ursprung.

(a) Wie muss $\vec{x}_S = (0,0,s)$ gewählt werden, damit $S$ zusammen mit den Quadratpunkten eine vierseitige Pyramide mit lauter gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen bildet?

(b) Welchen Winkel bildet jede der aufsteigenden Kanten mit der $xy-$ Ebene?

(c) Welchen Winkel bildet jede dreieckige Seitenfläche der Pyramide mit der Grundfläche?

(d) Welchen Winkel bilden die dreieckigen Seitenflächen untereinander?

(e) Betrachten Sie die Pyramidenseitenfläche, welche die beiden Punkte mit positiver $x-$ Koordinate enthält. Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade, welche durch den Mittelpunkt dieser Seitenfläche geht und senkrecht diese Seitenfläche durchstößt.

(f) Was ist der Schwerpunkt der Pyramide bei homogener Massenverteilung?

(4) Vereinfachen Sie den Rechenausdruck $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\left(\vec{c}\times\vec{b}-\vec{b}\times 2\vec{c}\right)\right)$.

(5) Betrachten Sie die Kurve $\vec{x}\,(t) = (t\cos t, t\sin t, t)\,,\ t\geq 0$. Zeigen Sie, dass die Bahn dieser Kurve vollständig auf dem Kegel liegt, der durch die Gleichung $x^2+y^2=z^2$ beschrieben ist. Wie sieht diese Bahn aus?

**Zweiter Block: Zu den Funktionen**

(1) Geben Sie die *exakten* Sinus- und Cosinus- Werte zum Winkel $-4\pi/3$.

(2) Wie lauten die Abszissenwerte der Minima von $-2\sin(4x-3)+5$?

(3) Geben Sie *alle* Lösungen der Gleichung $\tan(x)=1$ an, im Bereich aller Zahlen, deren Cosinuswert nicht Null ist.

(4) Eine Funktion $f$ habe die Eigenschaft, dass $f(0)=0$ und $f(x)\to m$ für $m\to\infty$, $(m>0)$. $f$ steige derart gegen den Wert $m$, dass sich der Abstand zwischen $m$ und $f(x)$ halbiert, wenn $x$ um den Wert 10 anwächst. Geben Sie den Rechenausdruck für $f$.

(5) Sei $f(x)=cx^b$, $b>0$, $c>0$, für $x>0$. Führen Sie nunmehr eine neue unabhängige Variable $u=\ln(x)$ und eine neue abhängige Variable $v=\ln(f(x))$ ein. Wie lautet der Rechenausdruck, mit dem Sie $v$ durch $u$ ausdrücken können? Was für eine Funktion ergibt das? Wie hängen deren Parameter bzw. graphische Eigenschaften mit den äußeren Parametern von $f$ zusammen?

(6) Diskutieren Sie die Funktionen $g(x)=\frac{x^3+x}{1-x^2}$, $h(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$ (ohne die Ableitung heranzuziehen). Grobe Skizze der Graphen! Überlegen Sie aber dann auch, was die erste Ableitung Ihnen noch mehr bringen würde in diesen Fällen.

(7) Wie sehen die Graphen aus zu $e^{(x/a)^b}$, $a>0$, $b>1$? Bringen Sie insbesondere heraus, was Anwachsen von $a$ und $b$ bewirken. Zeichnen Sie die Gestalt des Graphen, die grob qualitativ immer gleich ist.

(8) Zeigen Sie, dass die Ableitung einer geraden Funktion stets eine ungerade Funktion ergibt.